ADS-M-2

Moyennes géométriques de matrices positives

Travail demandé :

Il vous est demandé d'étudier puis de présenter le(s) texte(s) joint(s) à travers un exposé de synthèse d'une durée comprise entre 15 et 20 minutes.

Si l'étude de la totalité du dossier et la préparation d'un exposé cohérent dans la durée impartie ne vous paraît pas possible, vous pouvez décider de vous limiter à une partie du dossier.

Remarques générales :

1. Les textes proposés, quelle que soit leur origine, peuvent présenter des défauts (coquilles typographiques, négligences ou sous-entendus de l'auteur, voire erreurs…) qui, sauf exception, n'ont pas été corrigés.

2. Les textes proposés peuvent contenir des exercices qu'il n'est pas demandé de résoudre. Néanmoins, vous pouvez vous aider des énoncés de ces exercices pour enrichir votre exposé.

3. Vous pouvez annoter les documents qui vous sont fournis. Vos annotations ne seront pas regardées par l'examinateur.

Remarque particulière :

Les figures annoncées dans le texte sont regroupées à la fin du document.

Moyennes géométriques de matrices positives

Soit $\mathbb{R}+$ l'ensemble des nombres positifs[1]. Soient a et b dans $\mathbb{R}+$, une *moyenne* $m(a,b)$ peut être définie de plusieurs façons. Il est raisonnable d'espérer qu'une telle opération binaire m sur $\mathbb{R}+$ ait les propriétés suivantes :

(i) $m(a,b) = m(b,a)$.

(ii) $\min(a,b) \leq m(a,b) \leq \max(a,b)$.

(iii) $m(\alpha a, \alpha b) = \alpha m(a,b)$ pour tout $\alpha > 0$.

(iv) $m(a,b)$ est une fonction croissante de a et b.

(v) $m(a,b)$ est une fonction continue de a et b.

Les trois moyennes familières - arithmétique, géométrique et harmonique - satisfont ces cinq conditions. Plus généralement, on définit les *moyennes binômiales,* pour $-\infty \leq p \leq +\infty$ par

$$m_p(a,b) = \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p} \qquad \text{pour } -\infty \leq p \leq \infty,$$

où, pour les valeurs particulières p dans $\{0, -\infty, \infty\}$, on définit $m_p(a,b)$ par

$$\begin{aligned} m_0(a,b) &= \lim_{p\to 0} m_p(a,b) = \sqrt{ab}, \\ m_\infty(a,b) &= \lim_{p\to\infty} m_p(a,b) = \max(a,b), \\ m_{-\infty}(a,b) &= \lim_{p\to-\infty} m_p(a,b) = \min(a,b). \end{aligned}$$

Les moyennes arithmétiques et harmoniques correspondent respectivement aux cas $p = 1$ et $p = -1$. On peut comparer ces différentes moyennes : pour a et b donnés, la fonction $p \mapsto m_p(a,b)$ est croissante.

On a de même une théorie des moyennes assez développée pour les matrices définies positives. Introduisons quelques notations et définitions. Soit $\mathbb{M}_n = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels, $\mathbb{S}_n$ le sous-ensemble des matrices symétriques et $\mathbb{P}_n$ celui des matrices

1. Dans cet article, l'adjectif "positif" signifie "strictement positif" lorsqu'il qualifie un réel.

définies positives [2]. On note que $\mathbb{S}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n$ et $\mathbb{P}_n$ est un cône [3] ouvert de $\mathbb{S}_n$. Soient deux matrices définies positives A et B : on dit que $A \geq B$ (*resp.* $A > B$) si $A - B$ est semi-définie positive (*resp.* définie positive). On note de façon équivalente $A \geq B$ et $B \leq A$. On remarquera qu'il se peut que l'on n'ait ni $A \geq B$ ni $B \geq A$. À toute matrice inversible [4] P de taille $n \times n$, on associe l'application de *conjugaison* Γ_P de $\mathbb{M}_n$ dans lui-même qui associe à une matrice A sa matrice *congruente* $\Gamma_P(A) = {}^tPAP$; quand P est une matrice orthogonale, on dit que A et ${}^tPAP$ sont *orthogonalement congruentes*, ou *orthogonalement semblables*. On note $\mathbb{O}_n$ le groupe des matrices orthogonales de taille $n \times n$.

Nous pouvons maintenant préciser les conditions que doit satisfaire une moyenne sur l'ensemble des matrices définies positives. L'anologie avec les propriétés (i) - (v) du cas des nombres réels suggère que l'on demande à une moyenne M d'associer à deux matrices A et B définies positives, une matrice définie positive $M(A, B)$ telle que l'on ait les propriétés

(I) $M(A,B) = M(B,A)$.

(II) Si $A \leq B$, alors $A \leq M(A,B) \leq B$.

(III) $\forall P \in GL_n$: $M({}^tPAP, {}^tPBP) = {}^tPM(A,B)P$.

(IV) $M(A,B)$ est une fonction croissante de A et B, c'est-à-dire que si on a $A_1 \leq A_2$ et $B_1 \leq B_2$, alors $M(A_1,B_1) \leq M(A_2,B_2)$.

(V) $M(A,B)$ est une fonction continue de A et B.

La condition de monotonie (IV) est source de difficulté dans la construction de moyennes sur l'ensemble des matrices, comme le montre l'exemple suivant.

$$\text{Pour } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on a } A \geq B \text{ mais } A^2 \not\geq B^2.$$

Une façon classique d'étendre aux matrices définies positives une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est la suivante. Pour une matrice définie positive A, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathbb{O}_n$ telle que ${}^tPAP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, où les λ_i sont positifs ; on pose alors $\widetilde{f}(A) = {}^tP\,\mathrm{Diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))\,P$. On remarquera que la matrice $\widetilde{f}(A)$ est symétrique, mais pas nécessairement positive. Une telle application $\widetilde{f}$ est dite *matriciellement monotone* si l'inégalité $A \geq B$ dans $\mathbb{P}_n$ implique $\widetilde{f}(A) \geq \widetilde{f}(B)$, au sens où la matrice $\widetilde{f}(A) - \widetilde{f}(B)$ est semi-définie positive. On peut montrer que la fonction $x \mapsto x^p$ est monotone si et seulement si $0 \leq p \leq 1$, que l'application $\ln$ est monotone, mais que $\exp$ ne l'est pas. Dans la suite, on notera simplement f

2. On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{S}_n$ est semidéfinie positive si elle est symétrique et si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a ${}^tXAX \geq 0$ et qu'elle est définie positive si elle est symétrique et si pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a ${}^tXAX > 0$.
3. C'est-à-dire que pour tout $\lambda > 0$ et toute matrice A définie positive, alors λA est définie positive.
4. On note GL_n l'ensemble des matrices inversibles $n \times n$

l'extension de $\tilde{f}$ de f aux matrices définies positives.

Verif

Le lecteur vérifiera que les moyennes arithmétiques et harmoniques, qui associent à deux matrices définies positives A et B les matrices respectives $\frac{1}{2}(A+B)$ et $2\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}$ satisfont bien les conditions (I) - (V).

La notion de moyenne géométrique est plus délicate. Toute matrice définie positive A admet une unique racine carrée définie positive, notée $A^{1/2}$, mais le produit de deux telles racines carrés n'est en général même pas symétrique ! En revanche, si les matrices définies positives A et B commutent, alors le produit $A^{1/2}B^{1/2}$ est symétrique et défini positif. On cherche donc d'autres expressions qui se réduisent à $A^{1/2}B^{1/2}$ quand les matrices définies positives commutent. Un choix plausible est la quantité

Pn...

$$\exp\left(\frac{\ln A+\ln B}{2}\right), \quad \text{qui vaut également} \quad \lim_{p\to 0}\left(\frac{A^p+B^p}{2}\right)^{1/p}. \tag{1}$$

Malheureusement, ce candidat n'est pas non plus monotone : prendre deux matrices définies positives telles que $X \geq Y$ et $\exp X \not\geq \exp Y$, et prendre A et B telles que $X = \frac{1}{2}(\ln A + \ln B)$ et $Y = \frac{1}{2}\ln B$.

La condition (III) n'est pas non plus innocente ; en particulier, notre candidat malheureux ne la satisfait pas non plus.

L'analogue de $\sqrt{ab}$ qui a les propriétés souhaitées est en fait l'expression

$$A\sharp B = A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^{1/2}A^{1/2}, \tag{2}$$

introduite par Pusz et Woronowicz en 1975. Il n'est pas évident *a priori* que cette expression est symétrique en A et B, mais nous le verrons bientôt. La monotonicité en B provient de ce que la congruence conserve l'ordre (c'est-à-dire que $(B_1 \geq B_2) \Rightarrow ({}^tXB_1X \geq {}^tXB_2X)$) et de ce que la racine carrée est monotone.

La symétrie de $\sharp$ est plus évidente si l'on utilise la caractérisation suivante, due à Ando. On a

$$A\sharp B = \max\left\{X \,/\, X = {}^tX \text{ et } \begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix} \geq 0\right\}. \tag{3}$$

Parmi ses autres caractérisations, on peut définir $A\sharp B$ comme l'unique solution de l'équation de Ricatti

$$XA^{-1}X = B. \tag{4}$$

On appellera la quantité $A\sharp B$ la *moyenne géométrique de A et B*. Elle satisfait aux conditions (I) - (V) requises. Pour vérifier la propriété (III), on pourra utiliser (3) et (4). On vérifiera qu'elle satisfait également la relation

preuve

$$\left(\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2}\right)^{-1} \leq A\sharp B \leq \frac{A+B}{2}. \tag{5}$$

Deux matrices positives A et B peuvent être diagonalisées simultanément dans une base orthonormale (c'est-à-dire par une conjugaison orthogonale Γ_U avec $U \in \mathrm{O}_n$) si et seulement si elles commutent. En l'absence de commutation, on peut utiliser la conjugaison non unitaire définies en deux étapes de la façon suivante

$$(A,B) \xrightarrow{\Gamma_{A^{-1/2}}} \left(I, A^{-1/2}BA^{-1/2}\right) \xrightarrow{\Gamma_U} (I,D), \tag{6}$$

P

où U est une matrice orhtogonale telle la matrice ${}^tP\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)P$ est une matrice diagonale, notée D. Cela ôte quelque mystère à la construction (2). En fait, à toute moyenne m définie sur les nombres positifs, on peut associer l'application M qui à tout couple de matrices définies positives (A,B) associe $M(A,B) = \Gamma_{A^{-1/2}} m(I,D)$; la fonction M est monotone dès que la fonction $f(x) = m(1,x)$ est matriciellement monotone. La formule (2) correspond au cas où $m(a,b) = (ab)^{1/2}$.

L'argument que nous avons introduit pour obtenir la symétrie de la moyenne géométrique n'est pas indispensable. Soit en effet m une moyenne sur les réels positifs, $f(x) = m(1,x)$ et

$$M(A,B) = A^{1/2} f\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right) A^{1/2}. \tag{7}$$

Contrairement à son apparence, cette expression est symétrique en A et B. Montrons qu'on a effectivement

$$f\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right) = A^{-1/2}B^{1/2} f\left(B^{-1/2}AB^{-1/2}\right) B^{1/2}A^{-1/2}.$$

En utilisant la décomposition $A^{-1/2}B^{1/2} = QU$, où Q est définie positive et U est orthogonale, il suffit de montrer que l'on a

résultat à prouver

preuve

$$f\left(Q^2\right) = QUf\left({}^tUQ^{-2}U\right){}^tUQ = Qf\left(Q^2\right)Q.$$

Cela équivaut à dire que pour toute valeur propre λ de Q, on a

$$m\left(1,\lambda^2\right) = \lambda m\left(1,\lambda^{-2}\right)\lambda,$$

ce qui découle des relations (i) et (iii) de la moyenne m. Un argument similaire montre que M satisfait la relation (III).

Un corollaire simple de cette construction est que des inégalités du type (5) se conservent lorsque l'on passe de moyennes sur les réels positifs à des moyennes sur le matrices définies positives.

Que se passe-t-il lorsqu'on considère trois matrices définies positives ? Les moyennes arithmétiques et harmoniques définies respectivement par $\frac{1}{3}(A+B+C)$ et $\left(\frac{1}{3}\left(A^{-1}+B^{-1}+C^{-1}\right)\right)^{-1}$ ne posent pas de problème particulier. En revanche, la moyenne géométrique soulève de nouveau des questions intéressantes.

On aimerait disposer d'une moyenne géométrique $G(A,B,C)$ qui se réduise à $A^{1/3}B^{1/3}C^{1/3}$ quand les matrices A, B et C commutent deux à deux. En outre, on voudrait avoir les propriété suivantes

(a) $G(A,B,C) = G(\pi(A,B,C))$ pour toute permutation π.

(b) $G({}^tPAP, {}^tPBP, {}^tPCP) = {}^tPG(A,B,C)P$ pour tout $P \in GL_n$.

(c) $G(A,B,C)$ est une fonction croissante de A, B et C.

(d) $G(A,B,C)$ est une fonction continue de A, B et C.

Aucun des moyens présentés ci-dessus dans le cas de deux matrices ne s'étend réellement au cas de trois matrices : les expressions (2), (3) et (4) n'ont pas de généralisation utile. La définition d'une moyenne géométrique pour trois matrices définies positives à été un problème titillant pendant de nombreuses années. Nous présentons maintenant quelques progrès obtenus récemment sur cette question.

Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être plus commode. (Henri Poincaré)

On munit l'espace $\mathbb{M}_n$ du produit scalaire naturel $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ et on note $\|\cdot\|_2$ la norme qui lui est associée. Soient A et B deux éléments de $\mathbb{P}_n$. Un *chemin* γ joignant A et B est une application continûment dérivable γ de $[0,1]$ dans $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{M}_n$ telle que $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = B$. La *longueur* d'un chemin est la quantité

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma^{-1/2}(t)\gamma'(t)\gamma^{-1/2}(t)\|_2 dt. \tag{8}$$

Parmi tous les chemins joignant A et B il en existe un unique dont la longueur est minimale ; on l'appelle *géodésique* joignant A et B ; on le note $[A,B]$ et on appelle *distance* de A à B la quantité $\delta_2(A,B) = L([A,B])$; il s'agit effectivement d'une distance, car on a pour tout A, B et C dans $\mathbb{P}_n$:

- $\delta_2(A,B) = \delta_2(B,A)$,
- $\delta_2(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$,
- $\delta_2(A,B) \leq \delta_2(A,C) + \delta_2(C,B)$.

Puisque deux matrices semblables ont même trace, pour tout $P \in GL_n$, on a $\delta_2(\Gamma_P(A), \Gamma_P(B)) = \delta_2(A,B)$ pour tout A et B dans $\mathbb{P}_n$. On énonce ce fait en disant qu'une conjugaison par une matrice inversible est une *isométrie* pour la distance δ_2 sur $\mathbb{P}_n$.

preuve

L'application qui associe à une matrice symétrique A son exponentielle $\exp(A)$ est une bijection de $\mathbb{S}_n$ sur $\mathbb{P}_n$, et on a pour toutes matrices symétriques S et T la relation

$$\|S - T\|_2 \leq \delta_2(\exp(S), \exp(T)). \tag{9}$$

Nous donnons en appendice quelques éléments de démonstration de cette relation.

Lorsque les matrices S et T commutent, la géodésique joignant $A = \exp(S)$ et $B = \exp(T)$ est le chemin

$$\gamma(t) = \exp((1-t)S + tT) = \exp((1-t)S)\exp(tT) = A^{1-t}B^t, \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Pour $t \in [0,1]$, on a en outre $\delta_2(A, \gamma(t)) = t\delta_2(A,B)$. ? chgt de var

Dans le cas où les matrices A et B ne commutent pas, on peut se ramener au cas commutatif en utilisant le fait que la conjugaison $\Gamma_{A^{-1/2}}$ est une isométrie. La géodésique $[I, A^{-1/2}BA^{-1/2}]$ joignant la matrice I à la matrice $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ est paramétrisée par $\gamma_0(t) = (A^{-1/2}BA^{-1/2})^t$ et donc la géodésique $[A,B] = [\Gamma_{A^{-1/2}}(I), \Gamma_{A^{-1/2}}(A^{-1/2}BA^{-1/2})]$ est paramétrisée par

$$\gamma(t) = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t A^{1/2}, \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{10}$$

Cela montre que la moyenne géométrique $A\sharp B$définie par la formule (2) n'est autre que que le milieu de la géodésique joignant A et B dans $\mathbb{P}_n$. Ainsi, tandis que (2), (3) et (4) ont pu sembler être des variantes non commutatives de la moyenne géométrique, des considérations géométriques naturelles conduisent à la définition (2). On notera également que pour tout $t \in [0,1]$, on peut voire la quantité $\gamma(t)$ définie en (10) comme une moyenne de A et B, au sens de la formule (7), associée à la fonction $f(x) = x^t$. Mais ces moyennes ne sont pas symétriques et la condition (I) est en défaut, à l'exception du cas où $t = 1/2$.

Cette discussion conduit également à une formule explicite pour la distance δ_2. On a en effet $\delta_2(A,B) = \delta_2(I, A^{-1/2}BA^{-1/2}) = \|\ln(I) - \ln(A^{-1/2}BA^{-1/2})\|_2 = \|\ln(A^{-1/2}BA^{-1/2})\|_2$. Puisque les matrices $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ et $A^{-1}B$ ont mêmes valeurs propres, on a

$$\delta_2(A,B) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\ln(\lambda_i(A^{-1}B))^2\right)\right)^{1/2}. \tag{11}$$

L'inégalité (9) traduit une caractéristique essentielle de $\mathbb{P}_n$, à savoir sa *courbure positive*. Pour donner une idée de ce que cela signifie, considérons dans $\mathbb{S}_n$ un triangle de sommets O, S, T. Par l'application exponentielle, il est envoyé sur un "triangle" d'extrêmités $I, \exp(S), \exp(T)$ dans $\mathbb{P}_n$. Les longueurs des côtés $[O, S]$ et $[O, T]$, mesurés par la norme $\|\cdot\|_2$, sont égales à celles de leurs images, les géodésiques $[I, \exp(S)]$ et $[I, \exp(T)]$, mesurées par δ_2. Par la relation (9), la longueur du troisième côté $[\exp(S), \exp(T)]$ est supérieure (ou égale) à $\|S-T\|_2$. Le cas d'un triangle général de sommets A, B, C dans $\mathbb{P}_n$ s'y ramène par la conjugaison isométrique $\Gamma_{A^{-1/2}}$ qui envoie A sur I. Une façon d'énoncer ce phénomène est de dire que deux géodésiques émanant d'un point de $\mathbb{P}_n$ se séparent plus rapidement que leurs images réciproques (pour la fonction exponentielle) dans $\mathbb{S}_n$. Ce phénomène est illustré dans la Figure 1, qui illustre également la situation opposée de contraction qu'implique la considération de l'exponentielle imaginaire et des matrices anti-symétriques, non détaillée ici.

Revenons à la moyenne géométrique dans $\mathbb{P}_n$. Pour trois matrices A, B, C de $\mathbb{P}_n$, on a l'inégalité

$$\delta_2(A\sharp B, A\sharp C) \leq \frac{1}{2}\delta_2(B, C). \tag{12}$$

Cette inégalité nous dit que que dans tout triangle géodésique de $\mathbb{P}_n$ de sommets A, B, C, la longueur de la géodésique joignant les milieux de deux côtés est au plus égale à la moitié de la longueur du troisième côté ; dans un espace euclidien, la relation (12) est une égalité. La Figure 2 illustre ce fait.

Nous avons vu que la moyenne géométrique $A\sharp B$ est le milieu de la géodésique $[A, B]$. Cela suggère de définir la moyenne géométrique des trois matrices A, B, C de $\mathbb{P}_n$ comme "centre de gravité" du triangle géodésique $\Delta(A, B, C)$.

Dans un espace vectoriel euclidien, le centre de gravité $\mathbf{g}$ du traingle de sommets $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ est défini par $\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$. Cette définition ne peut pas s'étendre telle quelle au cône $\mathbb{P}_n$, mais le centre de gravité peut être caractérisé par d'autres propriétés susceptibles de s'étendre à $\mathbb{P}_n$. En voici trois :

(M1) $\mathbf{g}$ est le point d'intersection des trois médianes du triangle $\Delta(A, B, C)$;

(M2) $\mathbf{g}$ est l'unique point où la fonction

$$\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_3\|^2$$

atteint son minimum ;

(M3) $\mathbf{g}$ est l'unique point d'intersection de la suites de triangles emboîtés $(\Delta_n)_n$ et où $\Delta_1 = \Delta$ et Δ_{j+1} s'obtient en joignant les milieux des côtés de Δ_j.

Pour définir la moyenne géométrique de A, B, C dans $\mathbb{P}_n$, on peut tenter d'utiliser l'une ou l'autre de ces caractérisations, dont la formulation peut permettre l'extension à $\mathbb{P}_n$. On va noter ici la différence fondamentale entre la géométrie (dite *hyperbolique*) de $\mathbb{P}_n$ et celle d'un espace vectoriel euclidien.

En fait, la caractérisation (M1) ne peut pas s'étendre comme telle : en général, les médianes d'un triangle (comprises comme les géodésiques joignant un côté et le milieu du côté opposé - ce qui a bien un sens -) peuvent très bien ne pas s'intersecter, même deux à deux. La Figure 3 illustre ce fait. La Figure 4 illustre le fait que si l'on voit le triangle de $\mathbb{P}_2$ de sommets A, B, C comme l'enveloppe convexe de ses sommets (on comprend ici les segments comme des segments géodésiques), ce n'est pas un objet bidimentionnel.

La caractérisation (M2) s'étend à $\mathbb{P}_n$. Élie Cartan a montré qu'étant donnés trois points A, B, C de $\mathbb{P}_n$, il existe un unique point, notons le $G_2 = G_2(A, B, C)$ de $\mathbb{P}_n$, où la fonction

$$X \mapsto \delta_2^2(A, X) + \delta_2^2(B, X) + \delta_2^2(C, X)$$

atteint son minimum. Cet abord a été récemment étudié, mais on ne sait toujours pas si G_2 est une fonction monotone. Plus précisément, soit A, A', B, C des matrices définies positives avec $A' \geq A$; a-t-on $G_2(A', B, C) \geq G_2(A, B, C)$? L'expérimentation numérique suggère une réponse positive.

La caractérisation itérative (M3) se prête bien à une généralisation à $\mathbb{P}_n$: on construit par récurrence $\Delta(A_{j+1}, B_{j+1}, C_{j+1}) = \Delta(B_j \sharp C_j, C_j \sharp A_j, A_j \sharp B_j)$, avec $A_1 = A, B_1 = B, C_1 = C$. L'inégalité (12) assure la convergence de chaque suite $(A_j)_j, (B_j)_j, (C_j)_j$ vers une même limite que l'on note $G_3(A, B, C)$. Il est très aisé de vérifier que G_3 satisfait les conditions requises (a), (b) et (d) ; la propriété (c) provient du fait que pour toute matrice inversible P, la conjugaison Γ_P est une isométrie.

APPENDICE

Éléments de démonstration de l'inégalité (9)

Soient S et T deux matrices symétriques. On considère $D_T \exp(S)$, la dérivée de la fonction exponentielle au point S selon la direction T, définie par

$$D_T \exp(S) = \lim_{t \to 0} \frac{\exp(S + tT) - \exp(S)}{t}. \tag{13}$$

Si on se place dans une base orthonormale dans laquelle $S = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, on a

$$D_T \exp(S) = \left(\frac{e^{\lambda_i} - e^{\lambda_j}}{\lambda_i - \lambda_j} t_{ij} \right)_{1 \leq i,j \leq n}. \tag{14}$$

Il s'ensuit que l'on a

$$\exp(-S/2) D_T \exp(S) \exp(-S/2) = \left(\frac{\sinh(\lambda_i - \lambda_j)/2}{(\lambda_i - \lambda_j)/2} t_{ij} \right)_{1 \leq i,j \leq n}. \tag{15}$$

Puisqu'on a pour tout x : $\sinh(x) \geq x$, on a l'inégalité

$$\|S\|_2 \leq \| \exp(-S/2) D_T \exp(S) \exp(-S/2) \|_2. \tag{16}$$

L'inégalité (9) se déduit alors de la formule (8) et de la relation infinitésimale (16).

ANNEXE : FIGURES

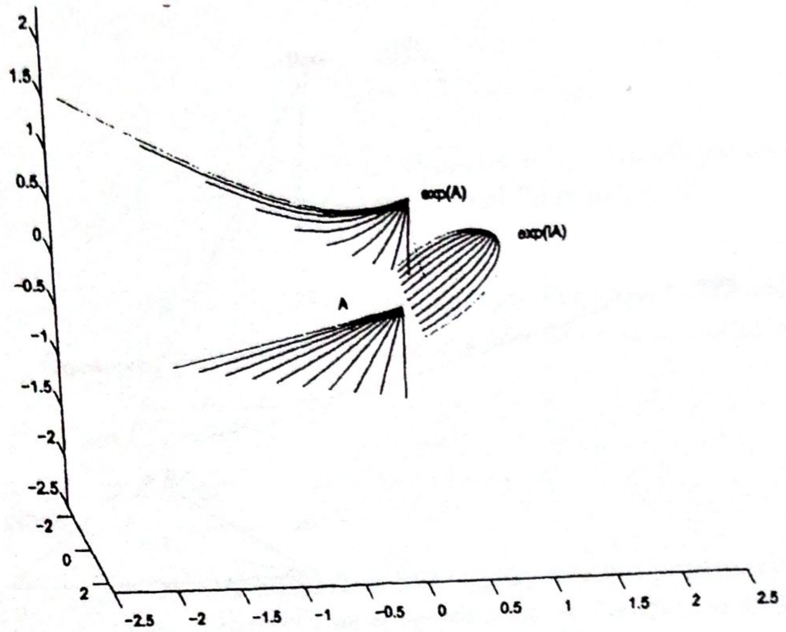

Figure 1 : Écartement et contraction de géodésiques

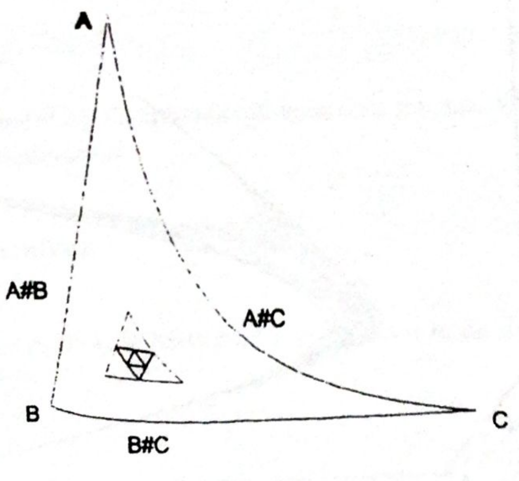

Figure 2 : Distance de deux moyennes

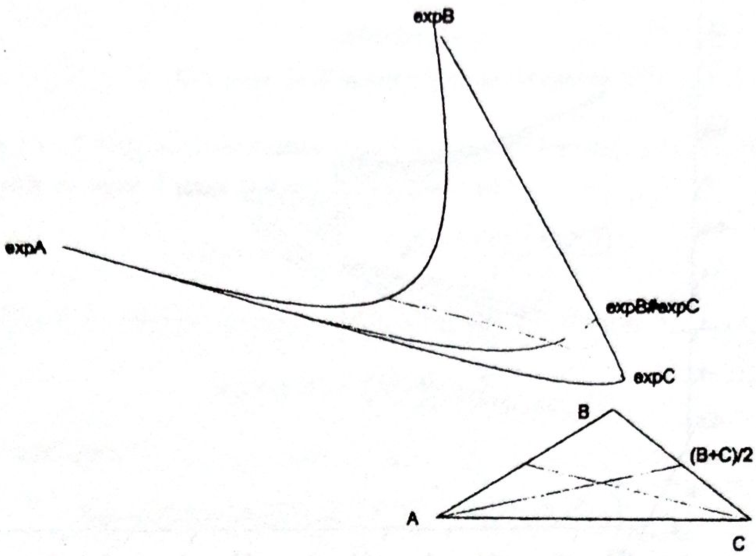

Figure 3 : Les médianes ne se rencontrent pas nécessairement

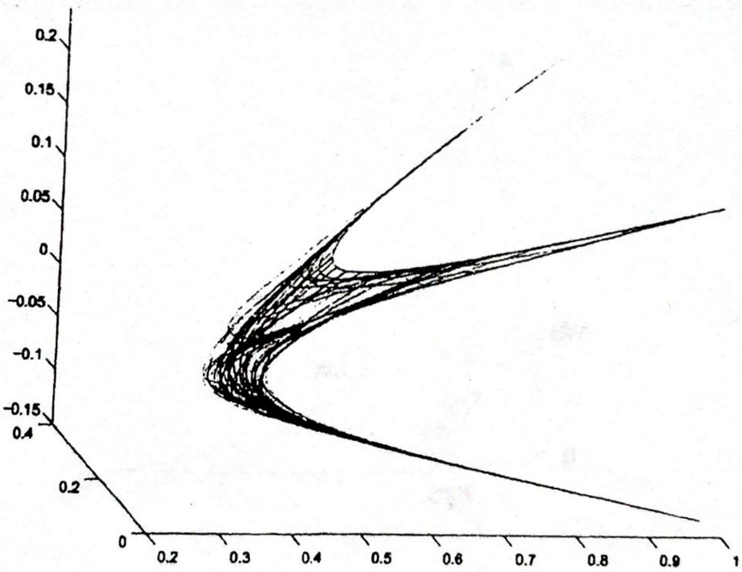

Figure 4 : L'enveloppe convexe de trois points n'est pas bi-dimensionnelle