Les trois parties sont indépendantes.

Notations

Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires. On notera $P[A]$ la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ et $E[X]$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeurs réelles.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant :

Si $Y_1, \dots, Y_n$ sont des variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes et intégrables, alors

$$E[Y_1 \cdots Y_n] = E[Y_1] \cdots E[Y_n].$$

On note log la fonction logarithme népérien. Par convention, on pose $\log 0 = -\infty$.

Première partie

Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel, et soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes telles que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, (!)

$$P[X_k = 1] = P[X_k = -1] = \frac{1}{2}.$$

On définit

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

ainsi que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\lambda) = \log\left(\frac{1}{2}e^{\lambda} + \frac{1}{2}e^{-\lambda}\right).$$

1. Soit Z une variable aléatoire réelle discrète telle que $\exp(\lambda Z)$ est d'espérance finie pour tout $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$P[Z \geqslant t] \leqslant \exp(-\lambda t) E[\exp(\lambda Z)].$$

X **2.** Montrer que $P[S_n \geqslant 0] \geqslant \frac{1}{2}$.

3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{n} \log P[S_n \geqslant t] \leqslant \inf_{\lambda \geqslant 0} (\psi(\lambda) - \lambda t).$$

Pour chaque $\lambda \geqslant 0$, on pose

$$m(\lambda) = \frac{E[X_1 \exp(\lambda X_1)]}{E[\exp(\lambda X_1)]},$$

(fn. de λ)

ainsi que

$$D_n(\lambda) = \exp(\lambda n S_n - n\psi(\lambda)).$$

(var. al — de λ)

4. Montrer que la fonction m est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et que pour tout $t \in [0,1[$, il existe un unique $\lambda \geqslant 0$ tel que $m(\lambda) = t$.

5a. Pour $n \geqslant 2$ et $\lambda \geqslant 0$, montrer que

$$E[(X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda))D_n(\lambda)] = 0.$$

5b. En déduire que, pour $n \geqslant 1$ et $\lambda \geqslant 0$,

$$E[(S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)] \leqslant \frac{4}{n}.$$

Pour tous $n \geqslant 1$, $\lambda \geqslant 0$ et $\varepsilon > 0$, on note $I_n(\lambda, \varepsilon)$ la variable aléatoire définie par

$$I_n(\lambda,\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } |S_n - m(\lambda)| \leqslant \varepsilon, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. Montrer que

$$P[|S_n - m(\lambda)| \leqslant \varepsilon] \geqslant E[I_n(\lambda,\varepsilon)\exp(\lambda n(S_n - m(\lambda) - \varepsilon)],$$

7. Montrer que

$$E[I_n(\lambda,\varepsilon)D_n(\lambda)] \geqslant 1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}.$$

8a. En déduire, pour chaque $\lambda \geqslant 0$ et $\varepsilon > 0$, l'existence d'une suite $(u_n(\varepsilon))_{n\geqslant 1}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini et telle que

$$\frac{1}{n}\log P[S_n \geqslant m(\lambda) - \varepsilon] \geqslant \psi(\lambda) - \lambda m(\lambda) - \lambda\varepsilon + u_n(\varepsilon).$$

8b. Conclure que pour tout $t \in [0,1[$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P[S_n \geqslant t] = \inf_{\lambda \geqslant 0} (\psi(\lambda) - \lambda t).$$

8c. La formule précédente est-elle encore valide pour $t = 1$?

Deuxième partie

On admet l'identité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable. Appelons (H) l'hypothèse suivante : il existe un unique point $x_0 \in [a,b]$ où f atteint son maximum, on a $a < x_0 < b$, et $f''(x_0) \neq 0$.

9. Montrer que sous l'hypothèse (H), on a $f''(x_0) < 0$.

10. Sous l'hypothèse (H), montrer que pour tout $\delta > 0$ tel que $\delta < \min(x_0 - a, b - x_0)$, on a l'équivalent, quand $t \to +\infty$,

$$\int_a^b e^{tf(x)}\,\mathrm{d}x \sim \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)}\,\mathrm{d}x.$$

11. Sous l'hypothèse (H), montrer l'équivalent, quand $t \to +\infty$,

$$\int_a^b e^{tf(x)}\,\mathrm{d}x \sim e^{tf(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{t\,|f''(x_0)|}}.$$

12a. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$n! = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^n\,\mathrm{d}t.$$

12b. En utilisant les résultats précédents, retrouver la formule de Stirling donnant un équivalent asymptotique de $n!$.

Troisième partie

13. Montrer que

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a |\sin(x^2)|\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

14. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^a \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{a^{4n+3}}{(2n+1)!\,(4n+3)}.$$

15. Montrer que les limites

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

existent et sont finies.

On admet les identités :

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

16. Montrer qu'il existe des nombres réels $c, c' \in \mathbb{R}$ tels que, pour $a \to +\infty$, on a

$$\int_0^a \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + \frac{c}{a}\cos(a^2) + \frac{c'}{a^3}\sin(a^2) + O\left(\frac{1}{a^5}\right).$$

On admettra qu'il existe des nombres réels $d, d' \in \mathbb{R}$ tels que, pour $a \to +\infty$, on a

$$\int_0^a \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + \frac{d}{a}\sin(a^2) + \frac{d'}{a^3}\cos(a^2) + O\left(\frac{1}{a^5}\right).$$

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de l'énoncé, f désigne une fonction infiniment dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un unique point $x_0 \in [0,1[$ où f' s'annule. On suppose également que $f''(x_0) > 0$. On se donne également une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ infiniment dérivable.

17. Montrer qu'on a, pour $t \to +\infty$,

$$\int_{x_0}^{1} g(x)\sin(tf(x))\,\mathrm{d}x = g(x_0)\int_{x_0}^{1}\sin(tf(x))\,\mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Pour tout $x \in [x_0, 1]$, on définit

$$h(x) = \sqrt{|f(x) - f(x_0)|}.$$

18a. Montrer que la fonction h définit une bijection de $[x_0, 1]$ sur $[0, h(1)]$.

18b. Montrer que l'application h est dérivable en x_0 à droite, et que $h'(x_0) = \sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}$.
On admet que la bijection

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} [x_0, 1] & \to & [0, h(1)] \\ x & \mapsto & h(x) \end{array} \right.$$

admet une application réciproque $h^{-1} : [0, h(1)] \to [x_0, 1]$ qui est infiniment dérivable.

19. Montrer que, pour $t \to +\infty$,

$$\int_{x_0}^{1}\sin(tf(x))\,\mathrm{d}x = \sin\left(tf(x_0) + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2tf''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

20. On suppose que $x_0 \in \,]0, 1[$. Montrer que, pour $t \to +\infty$,

$$\int_{0}^{1} g(x)\sin(tf(x))\,\mathrm{d}x = g(x_0)\sin\left(tf(x_0) + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{2\pi}{tf''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$