Le sujet comprend 9 pages, numérotées de 1 à 9

* * *

Début du sujet

Définitions et notations

• Si A est un ensemble fini, on note $\operatorname{Card} A$ son cardinal.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Delta_n = \{1, \dots, n\}$. Si A est une partie de $\mathbb{R}$ de cardinal n, on note β_A l'unique bijection croissante de A sur Δ_n.

• On note Σ_n le groupe des bijections de Δ_n sur Δ_n. Si $n \geq 2$, on note $\mathrm{MD}(n)$ l'ensemble des éléments $\sigma \in \Sigma_n$ qui vérifient la condition (de montée-descente) :

$$\text{pour } 1 \leq k \leq n-1 : \qquad \sigma(k) < \sigma(k+1) \text{ si } k \text{ est impair}, \qquad \sigma(k) > \sigma(k+1) \text{ si } k \text{ est pair};$$

et on note $\mathrm{DM}(n)$ l'ensemble des éléments $\sigma \in \Sigma_n$ qui vérifient la condition (de descente-montée) :

$$\text{pour } 1 \leq k \leq n-1 : \qquad \sigma(k) > \sigma(k+1) \text{ si } k \text{ est impair}, \qquad \sigma(k) < \sigma(k+1) \text{ si } k \text{ est pair}.$$

• Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Un maximum (resp. minimum) relatif de f est un réel x tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(y) \leq f(x)$ (resp. $f(y) \geq f(x)$) pour tout $y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. Un maximum (resp. minimum) relatif strict de f est un réel x tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(y) < f(x)$ (resp. $f(y) > f(x)$) pour tout $y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\setminus \{x\}$. Un extremum relatif est un point de $\mathbb{R}$ qui est soit un maximum relatif, soit un minimum relatif. Un extremum relatif strict est un point de $\mathbb{R}$ qui est soit un maximum relatif strict, soit un minimum relatif strict.

• La droite réelle sera toujours munie de la norme associée à la valeur absolue.

• Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite *simple* si elle est continue, si l'ensemble $E(f)$ des extremums relatifs de f est fini et si la restriction de f à $E(f)$ est injective.

• On note S l'ensemble des fonctions simples de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et, pour $n \in \mathbb{N}$, on note S_n l'ensemble des fonctions $f \in S$ telles que $\operatorname{Card} E(f) = n$. On note enfin $S_* = \cup_{n \geq 2} S_n$.

• Les *composantes connexes par arcs* d'une partie d'un espace normé seront simplement appelées les *composantes* de cette partie.

• On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. Si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$ et si $\mathscr{A}$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$, pour $x \in \mathscr{A}$ on pose $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Les parties II, III, IV, V sont indépendantes.

Partie I

1. a. Vérifier que les extremums relatifs des fonctions de S sont stricts.

b. Soit $f \in S$. Montrer que la restriction de f à l'adhérence de chaque composante de $\mathbb{R} \setminus E(f)$ est strictement monotone. En déduire que si $x \in E(f) \setminus \{\text{Max } E(f)\}$ est un maximum (resp. minimum) relatif, le plus petit élément y de $E(f)$ vérifiant $y > x$ est un minimum (resp. maximum) relatif.

c. Soit $f \in S_n$ avec $n \geq 2$. On pose $\mathscr{E}(f) = f(E(f))$. Soit σ_f l'élément de Σ_n défini par

$$\sigma_f = \beta_{\mathscr{E}(f)} \circ f \circ \beta_{E(f)}^{-1}.$$

Montrer que $\sigma_f \in \mathrm{MD}(n) \cup \mathrm{DM}(n)$.

2. On définit une relation $\sim$ sur S de la manière suivante : pour tout couple (f, g) de S^2, $f \sim g$ si et seulement si il existe deux bijections continues $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, strictement croissantes, qui vérifient $f = \psi \circ g \circ \varphi$.

a. Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence sur S et montrer que chaque classe d'équivalence de $\sim$ est contenue dans l'un des ensembles S_n, $n \in \mathbb{N}$.

b. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{u_1, \ldots, u_n\}$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ des parties de $\mathbb{R}$ qui vérifient $u_1 < \cdots < u_n$ et $v_1 < \cdots < v_n$. Vérifier qu'il existe une bijection continue $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante telle que $\chi(u_k) = v_k$ pour $1 \leq k \leq n$.

c. On suppose que f et g sont dans S_* et que

$$\lim_{x \to \pm\infty} |f(x)| = +\infty, \quad \lim_{x \to \pm\infty} |g(x)| = +\infty.$$

Démontrer que $f \sim g$ si et seulement si $\sigma_f = \sigma_g$.

d. L'équivalence précédente subsiste-t-elle pour deux fonctions f et g quelconques de S_* ?

3. On note C_b^0 l'espace des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que l'on munit de la norme uniforme : $\|f\| = \operatorname{Sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ pour $f \in C_b^0$.

a. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset \mathbb{R}$ et $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}$ avec $u_1 < \cdots < u_n$ et $v_1 < \cdots < v_n$. Montrer qu'il existe une application continue $\zeta : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

- pour $s \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto \zeta(s, x)$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$,
- $\zeta(0, x) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $\zeta(1, u_k) = v_k$, $1 \leq k \leq n$.

b. Démontrer que les classes d'équivalence de la restriction de $\sim$ à $S_* \cap C_b^0$ sont connexes par arcs.

c. Donner un exemple d'arc continu $\gamma : [0, 1] \to S \cap C_b^0$ tel que $\gamma(0) \in S_0$ et $\gamma(1) \in S_2$.

Partie II

Dans cette partie, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ l'espace des fonctions polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré au plus n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Id l'application identique de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $\| \ \|$ et l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de la norme associée, encore notée $\| \ \|$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on note $B(x,r)$ (resp. $B(x,r]$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon r. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et soit $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et dont la différentielle φ en 0 est inversible.

a. On pose

$$g = \mathrm{Id} - \varphi^{-1} \circ f.$$

Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathcal{O}$ et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(0,\varepsilon) \subset \mathcal{O}$ et $\|Dg(x)\| \leq \frac{1}{2}$ pour $x \in B(0,\varepsilon)$. En déduire que f est injective dans $B(0,\varepsilon)$.

b. Soit $0 < r < \varepsilon$ et soit $z_0 \in B(0, r/2)$. On pose $h(x) = g(x) + z_0$ pour $x \in \mathcal{O}$. Montrer que

$$h\big(B(0,r]\big) \subset B(0,r].$$

c. Montrer qu'il existe $a \in B(0,r]$ tel que $f(a) = \varphi(z_0)$.

d. Soient $W = \varphi\big(B(0,r/2)\big)$ et $V = f^{-1}(W) \cap B(0,\varepsilon)$. Montrer que V et W sont ouverts et que $f_{|V}$ est un homéomorphisme de V sur W.

2. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 dont la différentielle en x est inversible pour tout $x \in \mathcal{O}$. Démontrer que l'image par f d'un ouvert de $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

3. Pour $n \geq 2$, soit $O_{n-1} = \big\{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}\big\}$ et soit U_{n-1} l'ensemble des $(n-1)$-uples $(y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que

$$0 < y_1, \quad y_i > y_{i+1} \text{ si } i \in \{1, \dots, n-2\} \text{ est impair}, \quad y_i < y_{i+1} \text{ si } i \in \{1, \dots, n-2\} \text{ est pair}.$$

Pour $x \in O_{n-1}$, on définit la fonction $\pi_x \in \mathscr{P}_n$ par $\pi_x(t) = t(x_1 - t) \cdots (x_{n-1} - t)$. On définit l'application $Y = (Y_1, \dots, Y_{n-1}) : O_{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ par

$$Y_i(x) = \int_0^{x_i} \pi_x(u)\, du, \qquad x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in O_{n-1}.$$

a. Soient $j \in \{1, \dots, n-1\}$ et $x \in O_{n-1}$. Montrer que

$$d_{x,j} : t \mapsto \int_0^t u \prod_{1 \leq \ell \leq n-1,\ \ell \neq j} (x_\ell - u)\, du$$

est dans $\mathscr{P}_n$ et s'annule avec sa dérivée en 0. En déduire l'existence de $\chi_{x,j} \in \mathscr{P}_{n-2}$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad d_{x,j}(t) = t^2 \chi_{x,j}(t).$$

b. Pour $x \in O_{n-1}$ et $(i,j) \in \{1, \dots, n-1\}^2$, montrer l'existence de $\dfrac{\partial Y_i}{\partial x_j}(x)$ et vérifier que

$$\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}(x) = d_{x,j}(x_i).$$

En déduire que Y est une application de classe C^1 sur l'ouvert O_{n-1}, à valeurs dans U_{n-1}.

c. Démontrer que pour $x \in O_{n-1}$, la partie $\{\chi_{x,j} \mid j \in \{1, \ldots, n-1\}\}$ est une base de $\mathscr{P}_{n-2}$.

d. En déduire que la différentielle de Y au point x est inversible.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, une fonction de $\mathscr{P}_n$ est dite unitaire lorsque le coefficient de son terme de degré n est 1. On note $\mathscr{P}_n^u$ l'ensemble de ces fonctions. On note $C_n = \operatorname{Inf} \{ \int_0^1 |f(t)| \, dt \mid f \in \mathscr{P}_n^u\}$.

a. Montrer que $C_n > 0$.

b. Pour $n \geq 2$, démontrer que si $x \in O_{n-1}$

$$(x_{n-1})^{n+1} \leq \frac{1}{C_n}\Big[Y_1(x) + \sum_{i=1}^{n-2}(-1)^i\big(Y_{i+1}(x) - Y_i(x)\big)\Big].$$

c. Vérifier que l'application Y se prolonge continûment à l'adhérence de O_{n-1}.

d. Montrer que si K est un compact de $\mathbb{R}^{n-1}$ contenu dans U_{n-1}, $Y^{-1}(K)$ est compact.

5. Montrer que $Y(O_{n-1})$ est ouverte et fermée dans U_{n-1} et en déduire que Y est surjective.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute fonction f de S_n vérifiant $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = \pm\infty$, il existe un élément $g \in \mathscr{P}_{n+1}$ tel que $f \sim g$ (où $\sim$ est la relation définie en I.2).

Partie III

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{B}(n,k)$ l'ensemble des applications $\sigma \in \mathrm{MD}(n+1)$ telles que

$$\sigma(2) - \sigma(1) = k + 1$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}(n,s,k)$ l'ensemble des éléments σ de $\mathrm{MD}(n+2)$ tels que

$$\sigma(2) - \sigma(1) = s + 1, \qquad n + 2 - \sigma(2) = k.$$

1. Pour $m \geq 2$ vérifier que l'application $\mathrm{Opp} : \Sigma_m \to \Sigma_m$, qui à $\sigma \in \Sigma_m$ associe $\eta \in \Sigma_m$ défini par

$$\eta(i) = m + 1 - \sigma(i),$$

est une bijection vérifiant $\mathrm{Opp}\big(\mathrm{MD}(m)\big) = \mathrm{DM}(m)$ et $\mathrm{Opp}\big(\mathrm{DM}(m)\big) = \mathrm{MD}(m)$. Vérifier que si $\sigma \in \Sigma_m$ et si i, j sont des éléments de $\{1, \ldots, m\}$ vérifiant $\sigma(j) > \sigma(i)$,

$$\sigma(j) - \sigma(i) = 1 + \operatorname{Card}\big\{k \in \Delta_m \mid \sigma(i) < \sigma(k) < \sigma(j)\big\}.$$

2. À quelle condition (nécessaire et suffisante) sur n et k l'ensemble $\mathcal{B}(n,k)$ est-il non vide ? À quelle condition (nécessaire et suffisante) sur n, s et k l'ensemble $\mathcal{C}(n,s,k)$ est-il non vide ?

3. Dans cette question et la suivante, on fixe $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$ et $1 \leq s \leq n-k$. On se propose de construire une bijection de $\mathcal{C}(n,s,k)$ sur $\mathcal{B}(n,k)$. Soit $\sigma \in \mathcal{C}(n,s,k)$.

a. Vérifier que le nombre m d'entiers $j \geq 4$ tels que $\sigma(j) > \sigma(3)$ vérifie $m \geq k$. On note $j_1, \ldots, j_m$ ces entiers, que l'on ordonne de telle manière que $\sigma(j_1) < \sigma(j_2) < \cdots < \sigma(j_m)$.

b. On considère la fonction $\xi : \Delta_{n+1} \to \mathbf{N} \cup \{\sigma(j_k) + \frac{1}{2}\}$ définie par

$$\xi(1) = \sigma(j_k) + \tfrac{1}{2},\ \xi(2) = \sigma(3), \dots, \xi(n+1) = \sigma(n+2).$$

Montrer que ξ vérifie

$$\xi(p) > \xi(p+1) \text{ pour } p \text{ impair}, \quad \xi(p) < \xi(p+1) \text{ pour } p \text{ pair},$$

et que l'intervalle $]\xi(2), \xi(1)[$ contient exactement k éléments de $\{\xi(3), \dots, \xi(n+1)\}$.

c. On note $A = \xi(\Delta_{n+1})$ et on pose $\overline{\xi} = \beta_A \circ \xi$ (on rappelle que β_A désigne l'unique bijection croissante de A sur Δ_{n+1}). Montrer que $\overline{\xi} \in \mathrm{DM}(n+1)$.

d. Soit $\eta = \mathrm{Opp}(\overline{\xi})$. Vérifier que $\eta \in \mathcal{B}(n,k)$.

On note $\Psi_{n,s,k}$ l'application de $\mathcal{C}(n,s,k)$ dans $\mathcal{B}(n,k)$ définie par $\Psi_{n,s,k}(\sigma) = \eta$.

4. Soit $\eta \in \mathcal{B}(n,k)$ et soit $\xi = \mathrm{Opp}(\eta)$.

a. Vérifier que le nombre m d'entiers $j \geq 3$ tels que $\xi(j) > \xi(2)$ vérifie $m \geq k$. On note $j_1, \dots, j_m$ ces entiers, avec $\xi(j_1) > \xi(j_2) \cdots > \xi(j_m)$.

b. On pose $u_2 = \xi(j_k) - \frac{1}{2} > \xi(2)$. Montrer que le nombre m' d'entiers $i \geq 2$ tels que $\xi(i) < u_2$ vérifie $m' \geq s$. On les note $i_1, \dots, i_{m'}$, avec $\xi(i_1) > \cdots > \xi(i_{m'})$ et on pose $u_1 = \xi(i_s) - \frac{1}{2}$.

c. En considérant l'application θ définie par

$$\theta(1) = u_1,\ \theta(2) = u_2,\ \theta(3) = \xi(2), \dots, \theta(n+2) = \xi(n+1),$$

montrer l'existence de $\sigma \in \mathcal{C}(n,s,k)$ vérifiant $\Psi_{n,s,k}(\sigma) = \eta$.

d. Montrer que $\Psi_{n,s,k}$ est bijective.

5. Donner un procédé de calcul de $\mathrm{Card}\,\mathrm{MD}(n)$ par récurrence.

Partie IV

1. On note $E_n = \mathrm{Card}\,\mathrm{MD}(n)$ et $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des nombres impairs de Δ_n.

a. Démontrer que pour $n \geq 1$: $E_{n+1} = \displaystyle\sum_{i \in \mathcal{I}_{n+1}} \binom{n}{i-1} E_{i-1} E_{n+1-i}$.

b. En déduire que pour $n \geq 1$: $2E_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} E_i E_{n-i}$.

2. a. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{E_n}{n!} x^n$ est ≥ 1.

b. Pour $|x| < 1$, on note $f(x)$ la somme de la série entière précédente. Démontrer que

$$2f'(x) = f^2(x) + 1, \qquad \forall x \in]-1, 1[.$$

c. En déduire que $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos x} + \tan x$, $\forall x \in]-1,1[$, puis que

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \qquad \tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad \forall x \in]-1,1[.$$

3. Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et $n \in \mathbb{N}$, on note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f, avec la convention $f^{(0)} = f$. On note $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'unique application linéaire telle que

$$D(X^0) = 0, \qquad D(X^k) = k(X^{k-1} + X^{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note D^n la composée d'ordre n de D, avec la convention $D^0 = \mathrm{Id}$.

a. Soit $P_n = D^n(X)$. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

b. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit V_m le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ engendré par $\{X, \ldots, X^m\}$. Soit ι_m l'injection canonique de V_m dans $\mathbb{R}[X]$ et soit $\tau_m : \mathbb{R}[X] \to V_m$ la projection linéaire définie par $\tau_m(X^k) = X^k$ si $k \in \{1, \ldots, m\}$ et $\tau_m(X^k) = 0$ sinon. On pose enfin $\delta_m = \tau_m \circ D \circ \iota_m$. Vérifier que δ_m est une application linéaire de V_m dans V_m et écrire sa matrice M_m dans la base $(X, \ldots, X^m)$.

4. Soit $C_m \in \mathbb{R}[Y]$ le polynôme caractéristique de M_m.

a. Vérifier que $C_1 = Y$, $C_2 = Y^2 - 2$ et

$$C_m = YC_{m-1} - m(m-1)C_{m-2}, \qquad m \geq 3.$$

b. Calculer le déterminant de M_m.

c. Démontrer que, si e_m désigne la partie entière de $m/2$,

$$C_m = \sum_{k=0}^{e_m} (-1)^k c_{m,k} Y^{m-2k},$$

avec

$$c_{m,0} = 1; \qquad c_{m,k} = \sum_{(a_1,\ldots,a_k) \in J_k(m)} a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)\cdots a_k(a_k+1), \quad 1 \leq k \leq e_m;$$

où $J_k(m)$ désigne l'ensemble des k-uples d'entiers de $\{1, \ldots, m-1\}$ tels que $a_i + 2 \leq a_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq k-1$.

5. Dans la suite de cette partie, p désigne un entier premier impair fixé. On pourra utiliser sans démonstration le théorème de Wilson :

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \qquad [p].$$

On note $\mathbb{Z}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et si $a \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{a}$ sa classe dans $\mathbb{Z}_p$. Pour $1 \leq k \leq e_p$, on note $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des parties P à k éléments de $\mathbb{Z}_p$ vérifiant la condition

$$\forall \alpha \in P, \qquad \alpha + 1 \notin P.$$

a. Pour $P = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \in \mathcal{P}_k$ et $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, on pose $\tau_\alpha(P) = \{\alpha_1 + \alpha, \dots, \alpha_k + \alpha\}$. Montrer que l'application $\alpha \mapsto \tau_\alpha$ est un morphisme de $(\mathbb{Z}_p, +)$ dans le groupe des bijections de $\mathcal{P}_k$.

b. On définit une relation $\mathscr{R}$ entre éléments de $\mathcal{P}_k$ de la manière suivante : si A, B sont dans $\mathcal{P}_k$, $A \mathscr{R} B$ si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ tel que $B = \tau_\alpha(A)$. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}_k$, et que chaque classe d'équivalence est de cardinal p et admet un représentant de la forme $\{\overline{0}, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_k\}$ avec $0 < a_2 < \cdots < a_k < p$. On choisit un tel représentant pour chaque classe et on note R l'ensemble des représentants ainsi choisis.

c. Démontrer que

$$\overline{C_{p-1,k}} = \sum_{\{0,\dots,a_k\} \in R} \ \sum_{1 \le \ell \le p-1} \overline{\ell}\, \overline{\ell+1}\, \overline{a_2+\ell}\, \overline{a_2+\ell+1} \cdots \overline{a_k+\ell}\, \overline{a_k+\ell+1}.$$

6. a. Pour $q \in \mathbb{N}$, on pose $S_q = \sum_{\ell=0}^{p-1} \ell^q$. Observer que p divise $\sum_{\ell=0}^{p-1} \left((\ell+1)^{q+1} - \ell^{q+1}\right)$ et en déduire par récurrence que p divise S_q pour $0 \le q \le p-2$.

b. Soient $Z = [z_{ij}]$ et $Z' = [z'_{ij}]$ deux matrices carrées d'ordre N à éléments dans $\mathbb{Z}$. On définit la relation $Z \equiv Z'\ [p]$ par $z_{ij} \equiv z'_{ij}\ [p]$ pour $1 \le i, j \le N$. Démontrer que

$$(M_{p-1})^{(p-1)} \equiv (-1)^{(p-1)/2} \mathrm{Id} \quad [p].$$

c. Que peut-on dire d'un polynôme Q à coefficients entiers tel que $Q(M_{p-1}) \equiv 0\ [p]$?

7. On rappelle que $\overline{E}_n$ désigne la classe de $E_n = \operatorname{Card} \mathrm{MD}(n)$ dans $\mathbb{Z}_p$.

a. Montrer que $E_{2n+1} \equiv u_{2n}\ [p]$, où u_m est le coefficient sur le terme X de la décomposition de $\delta_{p-1}^m(X)$ dans la base $(X, \dots, X^{p-1})$.

b. Démontrer que la suite $(\overline{E}_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique, de période minimale $(p-1)/2$ si $p \equiv 1\ [4]$ et de période minimale $(p-1)$ si $p \equiv 3\ [4]$.

c. Indiquer les modifications à apporter aux questions précédentes pour montrer un résultat analogue pour la suite $(\overline{E}_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie V

On note $\widehat{S}$ l'ensemble des $f \in S_*$ vérifiant $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Dans cette partie, on dira simplement « minimum » pour « minimum relatif » et « maximum » pour « maximum relatif ». On note $\mathrm{Mi}(f)$ l'ensemble des minimums de f et $\mathrm{Ma}(f)$ l'ensemble des maximums de f, donc $E(f) = \mathrm{Mi}(f) \cup \mathrm{Ma}(f)$.

1. Soit $f \in \widehat{S}$.

a. Vérifier que $\operatorname{Card} \mathrm{Mi}(f) = \operatorname{Card} \mathrm{Ma}(f)$ et que pour $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, y[)$ est la réunion d'intervalles ouverts non vides et deux à deux disjoints. On note $\mathscr{I}(y)$ leur ensemble.

b. Montrer que pour tout élément M de $\mathrm{Ma}(f)$, il existe un unique couple $(I_-(M), I_+(M))$ d'éléments de $\mathscr{I}(f(M))$ tels que $M = \operatorname{Sup} I_-(M) = \operatorname{Inf} I_+(M)$.

c. Montrer que $I_+(M)$ est de la forme $]M, b[$ avec $b \in]M, +\infty[$ vérifiant $f(b) = f(M)$. Que peut-on dire de $I_-(M)$?

2. Soit $f \in \widehat{S}$. On note $\mathrm{Ma}(f) = \{M_1, \ldots, M_\mu\}$ avec $f(M_1) < f(M_2) < \cdots < f(M_\mu)$. Montrer qu'il est possible de définir une bijection Φ de $\mathrm{Ma}(f)$ dans $\mathrm{Mi}(f)$ par récurrence de la manière suivante :

— $\Phi(M_1)$ est le minimum de f contenu dans $I_-(M_1) \cup I_+(M_1)$ dont l'image par f est la plus grande des images par f des minimums contenus dans $I_-(M_1) \cup I_+(M_1)$;

— pour $2 \leq k \leq \mu$, $\Phi(M_k)$ est le minimum de f contenu dans $I_-(M_k) \cup I_+(M_k)$ dont l'image par f est la plus grande des images par f des minimums contenus dans $I_-(M_k) \cup I_+(M_k)$ et n'appartenant pas à $\Phi(\{M_1, \ldots, M_{k-1}\})$.

On dira que Φ est la *bijection associée à* f.

3. Soit $f \in \widehat{S}$. On fixe $R \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $E(f) \subset]-R, R[$ et on note $\widehat{S}(f, R)$ l'ensemble des fonctions g de $\widehat{S}$ qui coïncident avec f sur le complémentaire de $]-R, R[$. Pour $g \in \widehat{S}(f, R)$, on pose

$$\|g - f\|_R = \operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - f(x)|.$$

a. Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que si $g \in \widehat{S}(f, R)$ vérifie $\|g - f\|_R < \varepsilon_0$,

$$\operatorname{Card} E(g) \geq \operatorname{Card} E(f).$$

b. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier pair $\mu \geq E(f)$, il existe $g \in \widehat{S}(f, R)$ vérifiant $\|g - f\|_R < \varepsilon$ et telle que $\operatorname{Card} E(g) = \mu$.

4. Soit $f \in \widehat{S}$ et soit Φ sa bijection associée. Le *code* de f est l'ensemble

$$C(f) = \{f(M) - f(\Phi(M)) \mid M \in \mathrm{Ma}(f)\} \cup \{0\}.$$

On se propose dans la suite de cette partie de montrer que le code varie continûment avec la fonction, dans un sens approprié.

On fixe $f \in \widehat{S}$ et un réel $R > 0$ comme dans la question précédente, dont on conserve les notations. On fixe $\varepsilon > 0$.

a. On pose

$$\gamma_0(f, R) = \frac{1}{2} \operatorname{Min} \Big(\operatorname*{Min}_{(x,x') \in E(f)^2,\ x \neq x'} |x - x'|,\ R - \operatorname{Max} E(f),\ \operatorname{Min} E(f) + R \Big).$$

Vérifier que $\gamma_0(f, R) > 0$ et vérifier qu'il existe

$$\gamma \in]0, \gamma_0(f, R)[\tag{1}$$

tel que

$$\forall x \in E(f), \quad |f(x) - f(x - \gamma)| < \varepsilon/4, \quad |f(x) - f(x + \gamma)| < \varepsilon/4. \tag{2}$$

Dans la suite de cette question on suppose que γ est ainsi choisi.

Pour une fonction $h \in S$ et pour tout élément $x \in E(h) \setminus \{\operatorname{Max} E(h)\}$, on appellera *successeur de x pour h* le plus petit élément de $E(h)$ qui est strictement supérieur à x.

b. Soit $\overline{m} \in \mathrm{Mi}(f) \setminus \{\operatorname{Max} E(f)\}$ et soit $\overline{M} \in \mathrm{Ma}(f)$ le successeur de $\overline{m}$ pour f. Montrer l'existence de $\alpha_0 > 0$ tel que pour $g \in \widehat{S}(f, R)$ vérifiant $\|g - f\|_R < \alpha_0$, pour tout maximum M de g dans $[\overline{m} - \gamma, \overline{M} - \gamma]$, le successeur de M pour g est dans $[\overline{m} - \gamma, \overline{M}]$.

c. On conserve les hypothèses de la question précédente sur $\overline{m}$ et $\overline{M}$. Montrer l'existence de $\alpha_1 \in]0, \alpha_0[$ tel que pour $g \in \widehat{S}(f, R)$ vérifiant $\|g - f\|_R < \alpha_1$, pour tout maximum M de g dans $[\overline{m} - \gamma, \overline{M} - \gamma]$, le successeur m de M pour g vérifie $g(M) - g(m) < \varepsilon$.

d. Soit $\overline{M} \in \mathrm{Ma}(f) \setminus \{\mathrm{Max}\ E(f)\}$ et soit $\overline{m} \in \mathrm{Mi}(f)$ le successeur de $\overline{M}$ pour f. Montrer brièvement l'existence de $\alpha_2 > 0$ tel que pour $g \in \widehat{S}(f, R)$ vérifiant $\|g - f\|_R < \alpha_2$, pour tout minimum m de g dans $[\overline{M} - \gamma, \overline{m} - \gamma]$, le successeur M de m pour g vérifie $g(M) - g(m) < \varepsilon$.

e. Étudier sans démonstration le cas des maximums et minimums contenus dans les intervalles $[-R, \mathrm{Min}\ E(f) - \gamma]$ ou de la forme $[\mathrm{Max}\ E(f) - \gamma, R]$.

5. On fixe $f \in \widehat{S}$, de bijection associée Φ, et un réel $R > 0$ comme dans la question précédente.

a. Montrer qu'il existe ε_0 tel que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et si $\gamma > 0$ vérifie (1) et (2), il existe $\alpha > 0$ tel que pour toute fonction $g \in \widehat{S}(f, R)$ vérifiant $\|g - f\|_R < \alpha$, pour tout couple $(m, M) \in \mathrm{Mi}(f) \times \mathrm{Ma}(f)$ vérifiant $m = \Phi(M)$, alors

$$m_g = \Phi_g(M_g)$$

où

$$g(m_g) = \underset{x \in [m-\gamma, m+\gamma]}{\mathrm{Min}} g(x), \qquad g(M_g) = \underset{x \in [M-\gamma, M+\gamma]}{\mathrm{Max}} g(x),$$

et où Φ_g est la bijection associée à g.

b. Pour une partie finie C de $\mathbb{R}$ et un réel x, on pose $d_C(x) = \mathrm{Min}\ \{\, |x - y| \mid y \in C \,\}$. Si C et C' sont deux parties finies de $\mathbb{R}$, on pose

$$\mathcal{H}(C, C') = \mathrm{Max}\ \Big(\underset{x' \in C'}{\mathrm{Max}}\ d_C(x'), \underset{x \in C}{\mathrm{Max}}\ d_{C'}(x) \Big).$$

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $g \in \widehat{S}(f, R)$ vérifie $\|g - f\|_R < \alpha$, alors $\mathcal{H}\big(C(g), C(f)\big) < \varepsilon$.

* * *

Fin du sujet