EXERCICE I

On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(t) = \frac{\ln t}{t^2 - 1}.$$

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale

$$I_k = \int_0^1 t^{2k} \ln t \, \mathrm{d}t.$$

Q2. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$, puis démontrer que :

$$\int_0^1 f(t) \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}.$$

On pourra utiliser librement que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

EXERCICE II

Q3. Justifier que la fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$ et en déduire que :

$$\forall (a, b, c) \in]0, +\infty[^3, \qquad \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3}.$$

On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[^2$ par :

$$f(x; y) = x + y + \frac{1}{xy}.$$

Q4. Démontrer que f admet un unique point critique sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$, puis démontrer que f admet un extremum global que l'on déterminera.

PROBLÈME
Un peu d'arithmétique avec la fonction zêta de Riemann

On note ζ la fonction zêta de Riemann définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Le problème est constitué de trois parties indépendantes dans une large mesure.

Partie I - Algorithmique : calcul de zêta aux entiers pairs

La suite des nombres de Bernoulli notée $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$b_0 = 1, \qquad \forall n \geq 1,\ b_n = \frac{-1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k} b_k.$$

Leonhard Euler (1707-1783) a démontré la formule suivante qui exprime les nombres $\zeta(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k} b_{2k}}{(2k)!}.$$

Dans cette partie (informatique pour tous), on se propose de programmer le calcul des nombres de Bernoulli b_n afin d'obtenir des valeurs exactes de $\zeta(2k)$.

Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage Python. On sera très attentif à la rédaction du code notamment à l'indentation.

Q5. Écrire une fonction `factorielle(n)` qui renvoie la factorielle d'un entier $n \in \mathbb{N}$.

Q6. On considère la fonction Python suivante `binom(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$:

```
def binom(n, p):
    if not(0<= p <= n):
        return 0
    return factorielle(n)//(factorielle(p)*factorielle(n-p))
```

Combien de multiplications sont effectuées lorsque l'on exécute `binom(30,10)` ? Expliquer pourquoi il est possible de réduire ce nombre de multiplications à 20 ? Quel serait le type du résultat renvoyé si l'on remplaçait la dernière ligne de la fonction `binom` par `return factorielle(n)/(factorielle(p)*factorielle(n-p))` ?

Q7. Démontrer que, pour $n \geq p \geq 1$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

En déduire une fonction récursive `binom_rec(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

Q8. Écrire une fonction non récursive `bernoulli(n)` qui renvoie une valeur approchée du nombre rationnel b_n. On pourra utiliser librement une fonction `binomial(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

Par exemple `bernoulli(10)` renvoie 0,075 757 575 757 575 76 qui est une valeur approchée de $b_{10} = \frac{5}{66}$.

Partie II - Généralités sur la fonction zêta

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

Q9. Pour tout $a > 1$ réel, démontrer que la série $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge.

Q10. Démontrer que la fonction ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, puis qu'elle est décroissante.

Q11. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1, +\infty[$?

Q12. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

Q13. Soit $x > 1$. On pose :

$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

Démontrer que :

$$I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1.$$

En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1. ON

Q14. Un premier lien avec l'arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n. On pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et on prend $x > 1$. Justifier que la famille $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$. En déduire que :

$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}.$$

On pourra considérer la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ où $A_n = \{(a,b) \in A\,,\ ab = n\}$.

Partie III - Produit eulérien

Soit $s > 1$ un réel fixé. On définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}.$$

On rappelle qu'un entier a divise un entier b s'il existe un entier c tel que $b = ac$. On note alors $a|b$.

Q15. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $P(X \in a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^s}$.

Q16. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{N}^*$ des entiers premiers entre eux deux à deux et $N \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer par récurrence sur n que :

$$(a_1|N, a_2|N, \ldots, a_n|N) \Leftrightarrow a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n|N.$$

Le résultat persiste-t-il si les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont seulement supposés premiers dans leur ensemble, c'est-à-dire lorsque leur PGCD vaut 1 ?

Q17. En déduire que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des entiers de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux à deux, alors les événements $[X \in a_1\mathbb{N}^*], \ldots, [X \in a_n\mathbb{N}^*]$ sont mutuellement indépendants.
On pourra noter $(b_1, \ldots, b_r)$ une sous-famille de la famille $(a_1, \ldots, a_n)$.

On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$ la suite croissante des nombres premiers.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega)$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Q18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que :

$$P(B_n) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

Q19. Soit ω dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$. Que vaut $X(\omega)$? En déduire que :

$$\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}.$$

On se propose, en application, de prouver que la série $\sum \dfrac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que la série $\sum \dfrac{1}{p_n}$ converge.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}.$$

Q20. Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel l et que l'on a pour tout réel $s > 1$, $l \geq \zeta(s)$.
Conclure.

FIN