Notations pour l'ensemble du sujet :

K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note, pour n entier naturel, $n \geq 2$:

- $M_n(\mathrm{K})$ le K-espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans K.
- $D_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE

Q1. On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique ($\langle A|B\rangle = \mathrm{trace}({}^t A.B)$), déterminer $(D_n(\mathbb{R}))^\perp$, l'orthogonal de $D_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.

PROBLÈME - Théorème de décomposition de Dunford

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

> Si A est une matrice de $M_n(\mathrm{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur K, alors il existe un unique couple (D,N) de matrices de $M_n(\mathrm{K})$ vérifiant les quatre propriétés :
>
> (1) $A = D + N$;
>
> (2) D est diagonalisable dans $M_n(\mathrm{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;
>
> (3) N est nilpotente ;
>
> (4) $DN = ND$.
>
> De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.
>
> Le couple (D,N) s'appelle la décomposition de Dunford de A.

Partie I - Quelques exemples

Q2. Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $M_n(\mathrm{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $M_n(\mathrm{K})$ est nilpotente.

Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.

Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Q3. Donner un exemple d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.

Q4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme caractéristique χ_A, puis donner le couple (D,N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).

Q5. Application

Pour $A \in M_n(\mathrm{K})$, $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ est l'exponentielle de la matrice A.

Déduire de la question précédente l'exponentielle de la matrice A définie en **Q4.**

On pourra utiliser sans démonstration que si M et N sont deux matrices de $M_n(\mathrm{K})$ qui commutent, $\exp(M+N) = (\exp M)(\exp N)$.

Q6. Soit $A \in M_n(\mathrm{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.

Justifier que le polynôme $X(X-1)$ est annulateur de la matrice A^2.

Démontrer que le couple (D,N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par : $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

Q7. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?

Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{id})^2$. $X-1 \wedge (X-2)^2 = 1$

Q8. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_1\}$, $\ker(u - 2\mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_2\}$ et $\ker(u - 2\mathrm{id})^2 = \mathrm{vect}\{e_2, e_3\}$.

Écrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Q9. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A.

Q10. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}$ et en déduire deux polynômes U et V tels que :

$$(X-1)U(X) + (X-2)^2 V(X) = 1 \quad \text{avec} \quad \deg U < 2 \quad \text{et} \quad \deg V < 1.$$

Q11. On pose les endomorphismes : $p = V(u) \circ (u - 2\mathrm{id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \mathrm{id})$.

Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Démontrer que p est le projecteur sur $\ker(u - \mathrm{id})$ parallèlement à $\ker(u - 2\mathrm{id})^2$ et q est le projecteur sur $\ker(u - 2\mathrm{id})^2$ parallèlement à $\ker(u - \mathrm{id})$.

Q12. On pose $d = p + 2q$. Écrire la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ (de la question **Q8**).
Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q13. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n.
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leq i \leq p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i.
Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.
En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v.
Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pourra noter v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.

Q14. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathrm{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.

Q15. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathrm{K})$ qui commutent, démontrer que la matrice $A - B$ est nilpotente.

Q16. Déterminer les matrices de $M_n(\mathrm{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.

Q17. Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $M_n(\mathrm{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D, N) vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que D et N soient des polynômes en A.
Établir l'unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.

Partie IV - Non continuité de l'application $A \mapsto D$

Q18. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui sont diagonalisables.
$\mathcal{D}$ est-il un espace vectoriel ?
Si P est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$, justifier que l'application de $M_n(\mathbb{C})$ vers $M_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue.

Q19. Démontrer que $\mathcal{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Q20. Si (D, N) est le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A, on note φ l'application de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{D}$ qui à la matrice A associe la matrice D.
Justifier que φ est l'application identité sur $\mathcal{D}$ et en déduire que l'application φ n'est pas continue.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 21 1154 – D'après documents fournis