Dans ce problème, on étudie quelques propriétés des opérateurs intégraux à noyau de type positif.

La partie préliminaire comporte des résultats utilisés par la suite et qui pourront éventuellement être admis.

La seconde partie définit les noyaux de type positif (en abrégé NTP) et en donne quelques exemples.

Enfin, la dernière partie étudie certaines propriétés d'un opérateur à NTP, et montre sur un exemple le lien avec la résolution d'une équation différentielle du second ordre ayant certaines conditions aux limites. On démontrera également, sur cet exemple, le théorème de Mercer (1909).

Notations

— L'espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. On notera en particulier $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$.

— La matrice transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ est notée $A^\top$.

— On note $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices symétriques réelles.

— On dit qu'une matrice $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ est positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}),\ X^\top S X \geqslant 0,$$

et on note $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

— Les intervalles de $\mathbf{R}$ qui interviennent dans le problème seront toujours supposés d'intérieur non vide.

Quelques résultats préliminaires

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

1 ▷ Vérifier que pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ on a :

$$X^\top A X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j.$$

2 ▷ Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$, les valeurs propres de A sont des réels positifs ou nuls.

Soit f une application continue sur $[a\,;b]\times[c\,;d]$, à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Pour $(x,t)\in[a\,;b]\times[c\,;d]$ on pose : $\varphi(x,t)=\displaystyle\int_a^x f(u,t)\,\mathrm{d}u$.

3 ▷ Montrer que pour tout $x\in[a\,;b]$, l'application $t\mapsto\varphi(x,t)$ est continue sur $[c\,;d]$.

On pose alors, pour tout $x\in[a\,;b]$: $\psi(x)=\displaystyle\int_c^d \varphi(x,t)\,\mathrm{d}t$.

4 ▷ Montrer que ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$; préciser ψ'.

5 ▷ En déduire :

$$\forall x\in[a\,;b],\ \int_a^x\left(\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u=\int_c^d\left(\int_a^x f(u,t)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$$

On a donc, en particulier : $\displaystyle\int_a^b\left(\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u=\int_c^d\left(\int_a^b f(u,t)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$ (c'est le **théorème de Fubini**).

Cette quantité sera notée simplement :

$$\int_a^b\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t.$$

Soit f une application continue sur $[a\,;b]\times[c\,;d]$, à valeurs dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $M\in\mathbf{R}_+$ tel que, pour tous (x,y), $(x',y')\in[a\,;b]\times[c\,;d]$:

$$|f(x,y)-f(x',y')|\leqslant M\Big(|x-x'|+|y-y'|\Big)\qquad\text{(condition }\mathcal{L}).$$

n désignant un entier naturel non nul, on pose, pour tout entier $k\in[\![0\,;n]\!]$,

$$u_k=a+k\frac{b-a}{n}$$

et pour tout entier $\ell\in[\![0\,;n]\!]$,

$$t_\ell=c+\ell\frac{d-c}{n}.$$

Enfin, on définit la **somme de Riemann** :

$$S_n(f)=\frac{(b-a)(d-c)}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}f(u_k,t_\ell).$$

6 ▷ Démontrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n(f)=\int_a^b\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t$.

Pour la suite, on **admettra** que ce dernier résultat reste valable pour toute application f continue sur $[a\,;b]\times[c\,;d]$.

Tournez la page S.V.P.

Noyaux de type positif

Soit Ω un ensemble quelconque. Une application $K : \Omega \times \Omega \to \mathbf{R}$ s'appelle un **noyau de type positif** (en abrégé NTP) si :

(i) K est symétrique, c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in \Omega^2,\ K(x, y) = K(y, x)$;

(ii) pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega^n$, la matrice (appelée **matrice de covariance**) :
$$\mathrm{Cov}_K(x_1, \dots, x_n) = \big(K(x_i, x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$
appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$.

7 ▷ Soit H un espace préhilbertien réel, où le produit scalaire est noté $\langle\ |\ \rangle_H$. Montrer que l'application $K : \begin{array}{ccc} H^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x \,|\, y\rangle_H \end{array}$ est un NTP.

Soit Ω un ensemble. On dit qu'une application K sur $\Omega \times \Omega$ vérifie la propriété $(\mathcal{R})$ s'il existe un espace préhilbertien H et une application $\varphi : \Omega \to H$ tels que :
$$\forall (x, y) \in \Omega^2,\ K(x, y) = \langle \varphi(x) \,|\, \varphi(y)\rangle_H .$$

8 ▷ Montrer que si K vérifie la propriété $(\mathcal{R})$, alors K est un NTP.

9 ▷ Montrer que si $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ est un ensemble fini, et si K est un NTP sur Ω, alors K vérifie la propriété $(\mathcal{R})$.

Indication : on pourra diagonaliser la matrice $\mathrm{Cov}_K(x_1, \dots, x_n)$.

On considère ici l'espace vectoriel H des fonctions f continues et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur l'intervalle $[0\,;1]$, telles que $f(0) = 0$ (on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'un espace vectoriel). Pour $(f, g) \in H^2$ on pose :
$$\langle f \,|\, g\rangle_H = \int_0^1 f'(t) g'(t)\, \mathrm{d}t.$$

10 ▷ Montrer que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire sur H.

Soit le noyau
$$K : \begin{array}{ccc} [0\,;1] \times [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \min(x, y) . \end{array}$$

11 ▷ Montrer que K vérifie la propriété $(\mathcal{R})$.

Indication : pour tout $x \in [0\,;1]$, on pourra poser $\varphi(x) = K_x$, où K_x désigne l'application partielle $y \mapsto K(x,y)$.

Opérateurs à noyau

Soit $I = [a\,;b]$ un segment de $\mathbf{R}$. On notera E l'espace vectoriel $\mathscr{C}(I,\mathbf{R})$, que l'on munit du produit scalaire habituel : $\langle f\,|\,g\rangle = \displaystyle\int_I f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, et l'on note $\|\ \|_2$ la norme associée.

Soit K une application symétrique et continue de $I \times I$ dans $\mathbf{R}$. On lui associe alors l'application u_K définie sur E par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in I,\ u_K(f)(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t = \langle K_x\,|\,f\rangle\,,$$

où K_x désigne l'application partielle $t \mapsto K(x,t)$.

12 ▷ Montrer que si K' est une autre application symétrique et continue de $I \times I$ dans $\mathbf{R}$ telle que $u_K = u_{K'}$, alors $K = K'$.

13 ▷ Montrer que u_K est un endomorphisme de E, puis que cet endomorphisme est une application continue de l'espace vectoriel normé $\left(E, \|\ \|_2\right)$ dans lui-même.

14 ▷ Montrer que u_K est un endomorphisme symétrique de l'espace préhilbertien E.

En déduire que si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u_K et si f_λ, f_μ en sont deux vecteurs propres associés, alors f_λ et f_μ sont orthogonaux.

On suppose désormais que K est un NTP.

15 ▷ Montrer que, pour toute $f \in E$, on a $\langle u_K(f)\,|\,f\rangle \geqslant 0$. Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de u_K ?

Indication : utiliser la question 6 ▷.

On prend maintenant, $I = [0\,;1]$, et on note E l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}([0\,;1],\mathbf{R})$ que l'on munit du produit scalaire : $\langle f\,|\,g\rangle = \displaystyle\int_I f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, et l'on note $\|\ \|_2$ la norme associée.

Soit $f \in E$ donnée. On cherche ici à déterminer les applications g de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0\,;1]$ qui satisfont au problème aux limites :

$$(\mathcal{P})\quad \begin{cases} g'' &= -f \\ g(0) &= g'(1) \;=\; 0\,. \end{cases}$$

Tournez la page S.V.P.

16 ▷ Montrer que le problème $(\mathcal{P})$ possède une solution unique g, donnée par

$$g = u_K(f)$$

où K est le NTP défini par :

$$\begin{aligned} K\colon I \times I &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x,t) &\longmapsto \min(x,t)\,. \end{aligned}$$

17 ▷ Déterminer les valeurs propres de u_K (on les exprimera sous forme d'une suite strictement décroissante $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$).

Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k est de dimension 1, et déterminer un vecteur propre unitaire e_k qui l'engendre.

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on note $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ et p_n la projection orthogonale sur F_n.

18 ▷ En admettant la relation :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{\pi^4}{6}\,,$$

vérifier l'égalité :

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x,t)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k^2.$$

19 ▷ Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

20 ▷ En déduire, pour toute $f \in E$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| u_K(f) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \,|\, f\rangle\, e_k \right\|_2^2 = 0\,.$$

21 ▷ Montrer que la série de fonctions

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \langle e_k \,|\, f\rangle\, e_k$$

est uniformément convergente sur I, puis que

$$u_K(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \langle e_k \,|\, f\rangle\, e_k\,.$$

22 ▷ Démontrer que :

$$\forall (x,y) \in I^2, K(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_k(x) e_k(y) \qquad (1)$$

Indication : poser $K'(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k e_k(x) e_k(y)$ et montrer que $u_K = u_{K'}$.

23 ▷ En déduire la **formule de la trace** :

$$\int_0^1 K(x,x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \qquad (2)$$

puis la valeur de

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Les relations (1) et (2) se généralisent à tous les NTP ; il s'agit du théorème de Mercer (1909).

FIN DU PROBLÈME