ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2021

MARDI 13 AVRIL 2021
08h00 - 12h00

FILIERE MP - Epreuve n° 3

MATHEMATIQUES B (X)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires. On admet que toutes les variables aléatoires introduites peuvent bien être construites sur cet espace. On note $P(A)$ la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ et $E(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeurs réelles.

On rappelle que si $s \in]1, +\infty[$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ converge et on note $\zeta(s)$ sa limite.

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suit la loi zeta de paramètre $s > 1$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X = n) = \zeta(s)^{-1} \frac{1}{n^s}.$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et p est un nombre premier, on note $\nu_p(n)$ la valuation de n en p. On note également $(p_k)_{k \geqslant 1}$ la suite croissante des nombres premiers.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose, $\chi_4(2n) = 0$ et $\chi_4(2n-1) = (-1)^{n-1}$. On pourra utiliser sans justification que, pour m et n dans $\mathbb{N}^*$, on a $\chi_4(mn) = \chi_4(m)\chi_4(n)$.

Le sujet comporte quatre parties, et les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Partie I

Soit $s > 1$ un nombre réel et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant la loi zeta de paramètre s. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\{n \mid X\}$ l'évènement « n divise X » et $\{n \nmid X\}$ l'évènement complémentaire.

1a. Calculer $P(n \mid X)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1b. Soit $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers naturels. Montrer que les évènements

$$\{p_1^{\alpha_1} \mid X\}, \{p_2^{\alpha_2} \mid X\}, \dots, \{p_k^{\alpha_k} \mid X\}, \dots$$

sont mutuellement indépendants.

2a. Soit $r \geqslant 1$ un entier. Montrer que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{r} \{p_i \nmid X\}\right) = \prod_{i=1}^{r} (1 - p_i^{-s}).$$

2b. En déduire que

$$\zeta(s)^{-1} = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - p_k^{-s}).$$

3a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\nu_{p_k}(X) + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $(1 - p_k^{-s})$.

3b. Montrer que, pour $r \in \mathbb{N}^*$, $k_1 < \cdots < k_r$ dans $\mathbb{N}^*$ et $(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{N}^r$, on a

$$P(\nu_{p_{k_1}}(X) = n_1, \dots, \nu_{p_{k_r}}(X) = n_r) =$$

$$\sum_{\ell=0}^{r} (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \in \{0,1\}^r \\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_r = \ell}} P(\nu_{p_{k_1}}(X) \geqslant n_1 + \varepsilon_1, \nu_{p_{k_2}}(X) \geqslant n_2 + \varepsilon_2, \dots, \nu_{p_{k_r}}(X) \geqslant n_r + \varepsilon_r).$$

3c. En déduire que les variables aléatoires $\nu_{p_1}(X), \ldots, \nu_{p_k}(X), \ldots$ sont mutuellement indépendantes.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note, pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$,

$$r_i(n) = \operatorname{Card}\{d \in \mathbb{N} : d \equiv i\,[4] \text{ et } d \mid n\}.$$

On pose $g(n) = r_1(n) - r_3(n)$.

4a. Montrer que si m et n sont deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux, on a $g(mn) = g(m)g(n)$.

4b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout nombre premier p, on a

$$g(p^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 2, \\ n+1 & \text{si } p \equiv 1\,[4], \\ \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) & \text{si } p \equiv 3\,[4]. \end{cases}$$

5. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel $f(x)$ quand n tend vers $+\infty$. On suppose qu'il existe une fonction $h : \mathbb{N}^* \to [0, +\infty[$ telle que $h(X)$ est d'espérance finie et telle que $|f_n(m)| \leqslant h(m)$ pour tous m et n dans $\mathbb{N}^*$. Justifier que $E(f(X))$ est d'espérance finie et montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} E(f_n(X)) = E(f(X)).$$

6a. On note $r(n)$ le nombre de diviseurs $d \geqslant 1$ de n. Montrer que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r(n)n^{-s}$ converge et que sa somme vaut $\zeta(s)^2$.

6b. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g(n)n^{-s}$ converge.

7a. Montrer que la suite de fonctions $\left(x \mapsto \prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)_{n\geqslant 1}$ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ converge simplement vers la fonction identité.

7b. Montrer que $E(g(X)) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} E\left(g(p_k^{\nu_{p_k}(X)})\right)$.

8a. Montrer que si p est un nombre premier tel que $p \equiv 1\,[4]$, on a

$$E(g(p^{\nu_p(X)})) = \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

8b. Calculer $E(g(p^{\nu_p(X)}))$ si p est un nombre premier vérifiant $p \equiv 3\,[4]$.

8c. En déduire

$$E(g(X)) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \chi_4(p_k)p_k^{-s}}.$$

9a. Montrer que, si p est un nombre premier,

$$E\left(\chi_4(p^{\nu_p(X)})\right) = \frac{1-p^{-s}}{1-\chi_4(p)p^{-s}}.$$

9b. Montrer que

$$E(\chi_4(X)) = \frac{1}{\zeta(s)} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\chi_4(p_k)p_k^{-s}}.$$

9c. En déduire que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$

est convergente et que sa somme vaut $E(g(X))$.

Partie II

10a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin((2n+1)\theta) = \sin(\theta) P_n(\sin^2(\theta)).$$

Indication : on pourra développer $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{2n+1}$.

10b. Déterminer les racines de P_n et en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_n(x) = (2n+1) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right).$$

10c. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(\pi x) = (2n+1)\sin(\frac{\pi x}{2n+1}) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2(\frac{\pi x}{2n+1})}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right).$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > |x|$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > m$:

$$u_{m,n}(x) = (2n+1)\sin(\frac{\pi x}{2n+1}) \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{\sin^2(\frac{\pi x}{2n+1})}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right).$$

et

$$v_{m,n}(x) = \prod_{k=m+1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2(\frac{\pi x}{2n+1})}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right).$$

11a. Montrer que les suites, indexées par n, $(u_{m,n}(x))_{n>m}$ et $(v_{m,n}(x))_{n>m}$ sont convergentes dans $\mathbb{R}^*$.
On note $v_m(x)$ la limite de $(v_{m,n}(x))_{n>m}$.

11b. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > m$, on a

$$1 \geqslant v_{m,n}(x) \geqslant \prod_{k=m+1}^{n} \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right)$$

et en déduire que $\lim\limits_{m \to +\infty} v_m(x) = 1$.

11c. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(\pi x) = \pi x \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

Partie III

On rappelle que la suite $\left(\left(\sum_{k=1}^{n} k^{-1}\right) - \ln(n)\right)_{n \geqslant 1}$ converge. On note γ sa limite.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{x} e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{x k^{-1}}}{1 + x k^{-1}}.$$

12. Montrer que la suite de fonctions $(\Gamma_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers une fonction Γ de $]0, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$.

13. Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

14a. Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^2$ et que, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$(\ln(\Gamma))''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}.$$

14b. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(\Gamma))''(x) = 0$.

Soit $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que la fonction $\ln(f)$ est convexe et vérifie $f(1) = 1$ et $f(x+1) = x f(x)$ pour tout $x > 0$.

15a. Montrer que la fonction

$$S : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\frac{f(x)}{\Gamma(x)}\right) \end{array}$$

est 1-périodique et convexe.

15b. En déduire que $f = \Gamma$.

16. Montrer que pour tous $a \in]0, +\infty[$ et $x \in]0, +\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\, dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)}.$$

Indication : on pourra poser, pour $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\, dt$.

17. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Partie IV

18a. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$:

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}.$$

18b. En déduire que, pour $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$:

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} \right) 2^{2k+2} x^{2k}.$$

18c. En déduire que la fonction :

$$v : \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\cos(x)} \end{array}$$

est développable en série entière et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} = \frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}(2k)!} E_{2k}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E_{2k} = v^{(2k)}(0)$.

19a. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} E_{2k} = 0$$

et en déduire les valeurs de E_0, E_2 et E_4.

19b. Calculer $E(g(X))$ lorsque X est une variable aléatoire suivant la loi zeta de paramètre 3 puis de paramètre 5.