Problème

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Par segment de $\mathbb{R}$, on entend un intervalle de la forme $[a, b]$ avec $a < b$. On note $\mathbb{D}$ le disque unité fermé dans $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

L'intérieur et la frontière de $\mathbb{D}$ sont notés $\mathring{\mathbb{D}}$ et $\partial\mathbb{D}$ respectivement.

On note $\mathbb{C}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes. Pour $n \geq 0$, on désigne par $\mathbb{C}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus n. Un polynôme est dit unitaire si son coefficient dominant est égal à 1.

Étant donné une partie K de $\mathbb{C}$ et un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose :

$$\| P \|_K = \sup\{|P(z)| \mid z \in K\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Le but de ce problème consiste à établir des inégalités de la forme :

$$\| Q \|_K \| R \|_K \leq \lambda \| QR \|_K$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et Q et R sont des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$.

Le problème est divisé en quatre parties. Les deux premières parties permettent d'établir quelques résultats préliminaires qui sont utiles dans la suite. La troisième partie porte sur la situation où K est le disque unité fermé $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{C}$ et la quatrième partie est consacrée au cas où K est un segment de $\mathbb{R}$.

Dans chaque partie, les définitions et résultats utiles qui ont été introduits antérieurement sont rappelés. Chaque partie peut donc être traitée de manière indépendante. On notera de plus que :

- les parties I et II sont complètement indépendantes,
- la partie III utilise les résultats de la partie II mais pas ceux de la partie I,
- la partie IV utilise les résultats de la partie I mais pas ceux des parties II et III.

Partie I

Soit K une partie fermée, bornée et infinie de $\mathbb{C}$.

1.1. Montrer que $\| P \|_K$ appartient à $\mathbb{R}$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

1.2. Vérifier que $\| . \|_K$ est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

Dans la suite de cette partie, on fixe deux entiers naturels n et m non nuls, et on pose :

$$C^K_{n,m} = \sup\left\{\frac{\| Q \|_K \| R \|_K}{\| QR \|_K} \;\middle|\; Q \in \mathbb{C}_n[X] \setminus \{0\},\ R \in \mathbb{C}_m[X] \setminus \{0\}\right\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

$\forall Q \forall R$

$C^K_{nm} =$ $\dfrac{\|Q\|_K \|R\|_K}{\|QR\|_K} \leq C^K_{nm}.$

1.3. Soient Q et R deux polynômes non nuls dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer que :

$$\| Q \|_K \| R \|_K \geq \| QR \|_K .$$

1.4. Montrer que, si l'inégalité précédente est une égalité, alors il existe $z_0 \in K$ tel que :

$$|Q(z_0)| = \| Q \|_K, \quad |R(z_0)| = \| R \|_K \quad \text{et} \quad |Q(z_0)R(z_0)| = \| QR \|_K .$$

1.5. Montrer que $C^K_{n,m} > 1$.
Pour ce faire, on pourra se donner deux éléments distincts a et b dans K et vérifier que, pour $\rho \in \mathbb{R}$ assez grand, on a $\| Q_\rho R_\rho \|_K < \| Q_\rho \|_K \| R_\rho \|_K$ avec $Q_\rho(X) = X - (\rho(b-a)+a)$ et $R_\rho(X) = X - (\rho(a-b)+b)$.

1.6. On introduit le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $V = \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_m[X]$ ainsi que l'ensemble :

$$E = \{(Q,R) \in V \mid \| Q \|_K = \| R \|_K = 1\}.$$

Montrer qu'il existe un couple $(Q_0, R_0) \in E$ tel que :

$$\| Q_0 R_0 \|_K = \inf \left\{ \| QR \|_K \;\middle|\; (Q,R) \in E \right\}.$$

Pour ce faire, on pourra munir V de la norme définie par

$$\| (Q,R) \| = \| Q \|_K + \| R \|_K$$

pour $(Q,R) \in V$, puis étudier l'application

$\|QR\|_K \geq \|Q_0$ ...

$$f : E \to \mathbb{R}$$
$$(Q,R) \mapsto \| QR \|_K .$$

• $\|Q_0R_0\|_K \geq$

1.7. En déduire qu'il existe deux polynômes unitaires $Q_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $R_1 \in \mathbb{C}_m[X]$ tels que :

$$\frac{\| Q_1 \|_K \| R_1 \|_K}{\| Q_1 R_1 \|_K} = C^K_{n,m}.$$

Les questions **1.5** et **1.7** montrent en particulier que $C^K_{n,m} \in]1, +\infty[$.

Partie II

Dans cette partie, il sera utile de calculer des intégrales de certaines fonctions qui ne sont pas nécessairement continues par morceaux. On généralise donc la notion d'intégrale absolument convergente de la manière suivante :

Définition 1. Étant donné deux réels $a < b$ et une application f allant d'une partie de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge absolument ou que f est intégrable sur $[a,b]$ s'il existe un entier $n \geq 1$ et des réels $x_0, \dots, x_n$ tels que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ et, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, la fonction f est bien définie, continue et intégrable sur $]x_i, x_{i+1}[$. On pose alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt.$$

On admettra que la définition précédente coïncide avec la définition de l'intégrabilité au programme pour les fonctions continues par morceaux. De plus, si besoin, on pourra utiliser librement, **sans preuve**, les versions améliorées suivantes de certains théorèmes au programme :

Théorème 1 (Théorème de convergence dominée). Soient $a < b$ deux réels. Soient f et φ deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ au sens de la **Définition 1** et soient D_f et D_φ leurs domaines de définition respectifs. Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ convergeant simplement vers f sur le domaine D_f et telle que $|f_n(t)| \le \varphi(t)$ pour tout $n \ge 1$ et tout $t \in D_\varphi$, alors chaque terme de la suite (f_n) est intégrable et :

$$\int_a^b f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt.$$

Théorème 2 (Théorème de dérivation sous le signe intégrale). Soient $a < b$ deux réels et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit φ une fonction intégrable sur $[a, b]$ au sens de la **Définition 1** et soit D_φ son domaine de définition. Si f est une fonction définie sur $I \times [a, b]$ telle que :

(i) pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[a, b]$,
(ii) pour tout $t \in [a, b]$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,
(iii) pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[a, b]$,
(iv) pour tout $(x, t) \in I \times D_\varphi$, on a $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \le \varphi(t)$,

alors la fonction $g : x \mapsto \int_a^b f(x, t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,dt.$$

Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul.

2.8. Vérifier que l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \ln|Q(e^{i\theta})|\,d\theta$$

converge absolument au sens de la **Définition 1**.
On pourra utiliser le théorème de d'Alembert-Gauss.

On pose :

$$M(Q) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|Q(e^{i\theta})|\,d\theta\right),$$

et pour $p > 0$:

$$M_p(Q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |Q(e^{i\theta})|^p\,d\theta.$$

2.9. Expliquer pourquoi $M_p(Q)$ est strictement positif pour tout $p > 0$.

On définit la fonction :

$$\varphi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$p \mapsto \begin{cases} \ln\left(M_p(Q)\right) & \text{si } p>0 \\ 0 & \text{si } p=0. \end{cases}$$

2.10. Montrer que φ est continue sur $[0,+\infty[$.

2.11. Montrer soigneusement que φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée sur cet intervalle.

2.12. Calculer la limite de φ' en 0^+ puis déduire que :

$$M_p(Q)^{1/p} \xrightarrow[p\to 0^+]{} M(Q).$$

La quantité $M(Q)$ est appelée **la mesure de Mahler de** Q. Le reste de cette partie vise à calculer la mesure de Mahler de Q en fonction des racines de Q. On rappelle que $\mathbb{D}$ désigne le disque unité fermé dans $\mathbb{C}$ et que l'on note $\mathring{\mathbb{D}}$ et $\partial\mathbb{D}$ l'intérieur et la frontière de $\mathbb{D}$ respectivement.

2.13. Pour chaque nombre complexe w, on note $\mathrm{Re}(w)$ la partie réelle de w. Montrer que, pour tout $z \in \mathring{\mathbb{D}}$:

$$\ln|1-z| = -\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\right).$$

Pour ce faire, on pourra écrire $z = re^{i\theta}$ avec $0 \le r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, puis étudier la fonction :

$$F : [0,1[\to \mathbb{R}$$
$$\rho \mapsto \ln|1-\rho e^{i\theta}|.$$

2.14. Soit $z \in \mathring{\mathbb{D}}$. Déduire de la question précédente que la mesure de Mahler du polynôme $X-z$ est 1 et, dans le cas où $z \neq 0$, que celle du polynôme $X - z^{-1}$ est $|z|^{-1}$.

2.15. En utilisant la question précédente, montrer que, pour tout $z \in \partial\mathbb{D}$, la mesure de Mahler de $X-z$ est 1.
Pour ce faire, on pourra s'intéresser à la fonction :

$$g : [0,1[\to \mathbb{R}$$
$$r \mapsto M(X - rz)$$

et remarquer que, pour tous $r \in [0,1[$ et $\theta, \psi \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité $|e^{i\theta} - re^{i\psi}| \ge |\sin(\theta-\psi)|$.

2.16. Soit λ le coefficient dominant de Q et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de Q comptées avec multiplicité. Déduire des questions précédentes que :

$$M(Q) = |\lambda| \prod_{i=1}^{n} \max\{1, |\alpha_i|\}.$$

PARTIE III

Pour que cette partie puisse être traitée indépendamment des précédentes, on commence par rappeler la **Définition 1** qui a été introduite au début de la partie II :

Définition 1 (rappel). Étant donné deux réels $a < b$ et une application f allant d'une partie de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument ou que f est intégrable sur $[a, b]$ s'il existe un entier $n \geq 1$ et des réels $x_0, \dots, x_n$ tels que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ et, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, la fonction f est bien définie, continue et intégrable sur $]x_i, x_{i+1}[$. On pose alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt.$$

On fournit également l'encadré suivant, qui résume les résultats obtenus dans la partie II et qui sont utiles dans la suite :

D'après la question **2.8**, étant donné un polynôme non nul $Q \in \mathbb{C}[X]$, l'intégrale $\int_0^{2\pi} \ln|Q(e^{i\theta})|d\theta$ converge absolument au sens de la **Définition 1**. On peut donc définir la mesure de Mahler de Q par :

$$M(Q) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|Q(e^{i\theta})|d\theta\right).$$

D'après la question **2.16**, si λ est le coefficient dominant de Q et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les racines de Q comptées avec multiplicité, alors :

$$M(Q) = |\lambda| \prod_{i=1}^{n} \max\{1, |\alpha_i|\}.$$

On rappelle que $\mathbb{D}$ désigne le disque unité fermé dans $\mathbb{C}$ et que l'on note $\mathring{\mathbb{D}}$ et $\partial\mathbb{D}$ l'intérieur et la frontière de $\mathbb{D}$ respectivement. On se donne un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et on note d son degré.

3.17. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $r \in \mathbb{R}$, on a :

$$P(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z + re^{i\theta})d\theta.$$

ok

3.18. En déduire que :

$$\| P \|_{\mathbb{D}} = \| P \|_{\partial\mathbb{D}}.$$

On pourra appliquer la question **3.17** *à un élément* $z \in \mathbb{D}$ *tel que* $|P(z)| = \| P \|_{\mathbb{D}}$.

3.19. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|P(z)| \leq \| P \|_{\partial\mathbb{D}} \max\{1, |z|\}^d.$$

On pourra appliquer la question **3.18** *aux polynômes* $P(X)$ *et* $Q(X) = X^d P(X^{-1})$.

On fixe jusqu'à la fin de cette troisième partie deux entiers naturels non nuls n et m ainsi que deux polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $R \in \mathbb{C}[X]$ de degrés respectifs n et m. On introduit le polynôme $P = QR$ et on note λ son coefficient dominant et $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+m}$ ses racines comptées avec multiplicité.

3.20. Montrer qu'il existe u et v dans $\partial\mathbb{D}$ tels que :

$$\| Q \|_{\mathbb{D}} \| R \|_{\mathbb{D}} \leq |\lambda| \cdot \prod_{i=1}^{n+m} \max\{|u - \alpha_i|, |v - \alpha_i|\}.$$

3.21. En déduire que :

$$\| Q \|_{\mathbb{D}} \| R \|_{\mathbb{D}} \leq M(S)$$

où S est le polynôme défini par :

$$S(X) = (X-1)^{m+n} P\left(\frac{uX - v}{X-1}\right).$$

3.22. On pose $w = \dfrac{v}{u}$. Montrer que :

$$M(S) \leq \| P \|_{\mathbb{D}} \exp\left(\frac{n+m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left(\max\left\{|e^{i\theta} - 1|, |e^{i\theta} - w|\right\}\right) d\theta\right).$$

3.23. On pose $C = \exp\left(\dfrac{I}{2\pi}\right)$ avec :

$$I = \int_0^{2\pi} \ln\left(\max\left\{|e^{i\theta} - 1|, |e^{i\theta} + 1|\right\}\right) d\theta.$$

$e^{i\theta} - 1 = \cancel{\cos}$

En utilisant les questions précédentes, montrer que :

$$\| Q \|_{\mathbb{D}} \| R \|_{\mathbb{D}} \leq C^{n+m} \| P \|_{\mathbb{D}}.$$

$e^{i\theta} - 1 = \dfrac{\cos(\frac{\theta}{2}) e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i}$

Les deux questions qui suivent portent sur le calcul de la constante C.

3.24. Montrer que :

$$I = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}.$$

On pourra utiliser le résultat de la question **2.13**.

3.25. La calculatrice donne :

$$\exp\left(\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\right) \approx 1,78774486868,$$
$$\exp\left(\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{6} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\right) \approx 1,79449196958.$$

Peut-on en déduire l'arrondi de C à 10^{-2} près? Si oui, donner la valeur de cet arrondi. Dans tous les cas, justifier proprement la réponse.

Dans la dernière question de cette troisième partie, on cherche à montrer que, dans l'inégalité de la question **3.23**, la constante C est optimale.

3.26. Pour chaque entier naturel $k \geq 2$, on pose :

$$Q_k(X) = \prod_{\zeta \in U} (X - \zeta),$$
$$R_k(X) = \prod_{\zeta \in V} (X - \zeta),$$

où U désigne l'ensemble des racines k-ièmes de l'unité ζ telles que $|\zeta - 1| \leq |\zeta + 1|$ et V l'ensemble des racines k-ièmes de l'unité qui ne sont pas dans U. En minorant le quotient :

$$\frac{\| Q_k \|_{\mathbb{D}} \| R_k \|_{\mathbb{D}}}{\| Q_k R_k \|_{\mathbb{D}}},$$

montrer que :

$$C = \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\},\ \forall R \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}, \\ \| Q \|_{\mathbb{D}} \| R \|_{\mathbb{D}} \leq \lambda^{\deg(QR)} \| QR \|_{\mathbb{D}} \end{array} \right\},$$

où $\deg(QR)$ désigne le degré de QR.

Partie IV

Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et soient n et m deux entiers naturels non nuls. On rappelle que, dans la partie I, on a introduit la constante :

$$C^I_{n,m} = \sup\left\{ \frac{\| Q \|_I \| R \|_I}{\| QR \|_I} \;\middle|\; Q \in \mathbb{C}_n[X] \setminus \{0\},\ R \in \mathbb{C}_m[X] \setminus \{0\} \right\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

4.27. On se donne deux réels distincts c et d et on pose :

$$J = \begin{cases} [c, d] \text{ si } c < d \\ [d, c] \text{ si } d < c. \end{cases}$$

Soient $A \in \mathbb{C}_n[X]$ et $B \in \mathbb{C}_m[X]$ deux polynômes non nuls. Montrer qu'il existe des polynômes $C \in \mathbb{C}_n[X]$ et $D \in \mathbb{C}_m[X]$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\| A \|_I = \| C \|_J, \quad \| B \|_I = \| D \|_J, \quad \| AB \|_I = \| CD \|_J,$$
$$A(a) = C(c), \quad B(b) = D(d).$$

4.28. En déduire que la quantité $C^I_{n,m}$ ne dépend pas du segment I.

Dans la suite de cette partie, on choisit $I = [-1, 1]$ et on note $C_{n,m}$ à la place de $C^I_{n,m}$. On dit qu'une paire de polynômes $(Q, R) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_m[X]$ est **extrémale** si Q et R sont unitaires et :

$$\frac{\| Q \|_I \| R \|_I}{\| QR \|_I} = C_{n,m}.$$

On dit qu'une paire extrémale (Q, R) est **bonne** si Q et R sont de degrés respectifs n et m, et si :

$$\| Q \|_I = |Q(-1)| \quad \text{et} \quad \| R \|_I = |R(1)|.$$

On dit qu'une paire extrémale (Q, R) est **très bonne** si elle est bonne et si toutes les racines complexes de Q et R sont contenues dans I.

On rappelle que, d'après la partie I, les paires extrémales existent (question **1.7**) et que $C_{n,m} > 1$ (question **1.5**). On peut donc fixer dans la suite une paire extrémale (Q_0, R_0).

4.29. Soit J un segment contenu dans I tel que $\| Q_0 \|_J = \| Q_0 \|_I$ et $\| R_0 \|_J = \| R_0 \|_I$. Montrer que :
$$\| Q_0 R_0 \|_J = \| Q_0 R_0 \|_I .$$

4.30. Déduire des questions **4.27** et **4.29** qu'il existe une paire extrémale (Q_1, R_1) telle que :
$$\| Q_1 \|_I = |Q_1(-1)| \quad \text{et} \quad \| R_1 \|_I = |R_1(1)|.$$

4.31. Soient n_1 et m_1 les degrés respectifs de Q_1 et R_1. On pose $Q_2 = X^{n-n_1} Q_1$ et $R_2 = X^{m-m_1} R_1$. Montrer que (Q_2, R_2) est une bonne paire extrémale.

4.32. Soit w une racine de Q_2 et soit $S \in \mathbb{C}[X]$ tel que :
$$Q_2(X) = (X - w) S(X).$$

En posant :
$$S_2(X) = (X + 1 - |w + 1|) S(X),$$

montrer que (S_2, R_2) est une bonne paire extrémale.

4.33. Déduire de la question précédente qu'il existe un polynôme Q_3 dont toutes les racines sont dans $[-1, +\infty[$ et tel que le couple (Q_3, R_2) forme une bonne paire extrémale.

4.34. Montrer qu'il existe un polynôme Q_4 dont toutes les racines sont dans I et tel que le couple (Q_4, R_2) forme une bonne paire extrémale.
Pour ce faire, étant donné une racine w de Q_3 qui n'est pas dans I, on pourra introduire le polynôme :
$$S_3(X) = \frac{X-1}{X-w} Q_3(X),$$
puis on pourra s'inspirer de la méthode utilisée dans les deux questions précédentes.

4.35. Expliquer brièvement pourquoi il existe un polynôme R_4 tel que le couple (Q_4, R_4) forme une très bonne paire extrémale.

Dans la suite de cette partie, on fixe une très bonne paire extrémale quelconque (Q, R). Une telle paire existe bien d'après la question **4.35**. On pose $P = QR$ et on note $x_1 \leq \ldots \leq x_{n+m}$ les racines de P comptées avec multiplicité.

4.36. Montrer que :
$$Q = \prod_{k=m+1}^{n+m} (X - x_k) \quad \text{et} \quad R = \prod_{k=1}^{m} (X - x_k).$$

4.37. Vérifier que, pour tout $x \in]-\infty, -1[$, on a $|Q(x)| > |Q(-1)|$.

4.38. En procédant par l'absurde, montrer que $|P(-1)| = \| P \|_I$.
Pour ce faire, on pourra choisir un réel $\epsilon > 0$, introduire le segment $I_\epsilon = [-1-\epsilon, 1]$ et encadrer la quantité :
$$\frac{\| Q \|_{I_\epsilon} \| R \|_{I_\epsilon}}{\| P \|_{I_\epsilon}}$$
*grâce à la question **4.37**.*

On admet dans la suite que la méthode mise en place dans la question précédente permet également de montrer que $|P(1)| = \| P \|_I$.

4.39. On se donne un entier $k \in \{m+1, m+2, \dots, m+n-1\}$ et on pose :

$$S(X) = (X - x_k)(X - x_{k+1}).$$

Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que $S - T$ est de degré 1 et :

$$\| S - T \|_I \leq \epsilon,$$
$$|T(-1)| = |S(-1)|,$$
$$\forall x \in]-1, 1] \setminus]x_k - \epsilon, x_{k+1} + \epsilon[, \ |T(x)| < |S(x)|.$$

En déduire qu'il existe $y \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $|P(y)| = \| P \|_I$.
Pour traiter ce dernier point, on pourra procéder par l'absurde, écrire Q sous la forme SU pour un certain polynôme U, puis vérifier que si ϵ est choisi convenablement, le couple (TU, R) forme une très bonne paire extrémale.

On admet dans la suite que la méthode mise en place dans la question précédente permet également de montrer que pour chaque entier $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, il existe $y \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $|P(y)| = \| P \|_I$.

4.40. En s'inspirant de la méthode utilisée dans la question **4.39**, montrer qu'il existe un élément $y \in]x_m, x_{m+1}[$ tel que $|P(y)| = \| P \|_I$.

4.41. Montrer que P vérifie l'équation différentielle :

$$\| P \|_I^2 - P^2 = \frac{1}{(n+m)^2}(1 - X^2)P'^2.$$

4.42. En déduire que :
$$(1 - X^2)P'' - XP' + (n+m)^2 P = 0.$$

4.43. En considérant la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$y \mapsto P(\cos y),$$

vérifier que, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$P(x) = \| P \|_I \cos((n+m)\operatorname{Arccos} x).$$

4.44. En déduire que :

$$C_{n,m} = 2^{n+m-1} \cdot \left[\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \cos\left(\frac{2k-1}{2(n+m)}\pi \right) \right) \right] \cdot \left[\prod_{k=1}^{m} \left(1 + \cos\left(\frac{2k-1}{2(n+m)}\pi \right) \right) \right].$$

★ ★ ★ **Fin du problème** ★ ★ ★