

Préambule

On s'intéresse dans ce problème à certains sous ensembles de l'espace des fonctions à valeurs réelles et continues sur $]0, +\infty[$. On peut classiquement définir les opérateurs d'intégration J et de dérivation D de sorte qu'en particulier la composition $D \circ J$ est l'opérateur identité, où la notation $\circ$ désigne l'opérateur de composition usuel.

On cherche alors à définir pour tout réel $\alpha > 0$ des opérateurs fractionnaires d'intégration J^α et de dérivation D^α tels que $D^\alpha \circ J^\alpha$ est l'identité et tels que pour tout $\alpha, \beta > 0$ on aurait

$$J^\alpha \circ J^\beta = J^{\alpha+\beta} \quad \text{et} \quad D^\alpha \circ D^\beta = D^{\alpha+\beta}.$$

En particulier pour $\alpha = 1/2$, on cherche à définir une racine carrée de D , i.e. un opérateur $D^{1/2}$ tel que $D^{1/2} \circ D^{1/2} = D$.

Parmi les nombreuses approches possibles, nous allons suivre celles de Riemann-Liouville et Caputo.

- On commence par des préliminaires sur la fonction Gamma.
- On démontre ensuite une version simple du théorème de Fubini pour des fonctions continues sur un carré et qu'on s'autorisera à utiliser dans la suite du problème dans un cadre plus général, cf. la question 2).
- On introduit enfin la transformation de Laplace et on prouve son caractère injectif sur les fonctions continues.

L'intégration fractionnaire est définie dans la partie A alors que les dérivées fractionnaires le seront dans la partie B. Dans la dernière partie on s'intéressera enfin à deux équations différentielles fractionnaires simples.

Le candidat est libre d'admettre les résultats de la partie Préliminaires, pour aborder les parties A, B et C. Pour simplifier les arguments dans les préliminaires on se restreint aux fonctions continues sur $[0, +\infty[$ alors qu'on aura parfois besoin de considérer des fonctions continues sur $]0, +\infty[$ intégrables en 0. Le candidat est autorisé à utiliser les résultats des préliminaires dans ce cadre plus général.

Préliminaires

1) On considère la fonction Gamma définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

1-a) Montrer que Γ est bien définie pour x réel strictement positif.

1-b) Montrer que pour tout $x > 0$, on a la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\Gamma(n) = (n-1)!$.

- On admettra pour la suite que la fonction Gamma précédente peut être prolongée en une fonction qu'on notera encore Γ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ et vérifiant l'équation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$: l'écriture $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ n'est alors valable que pour $x > 0$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose en outre $\Gamma(-n) := +\infty$.

- On utilisera aussi sans justification l'égalité suivante

$$B(p, q) := \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (E_1)$$

où p, q sont des réels strictement positifs.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$ strictement positif et soit $f : [0, a] \times [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ définie et continue. Dans cette question on cherche à établir la version simple suivante du théorème de Fubini

$$\int_0^a dt \left(\int_0^t f(t, u) du \right) = \int_0^a du \left(\int_u^a f(t, u) dt \right). \quad (E_2)$$

que le candidat pourra utiliser dans la suite du problème pour $a = +\infty$ lorsque $\int_0^{+\infty} dt \left(\int_0^t |f(t, u)| du \right)$ converge.

2-a) i. Pour $t \in [0, a]$ fixé, soit $h(\eta) = \int_0^t |f(t+\eta, u) - f(t, u)| du$ définie pour $\eta \in [-t, a-t]$. Montrer que h tend vers 0 lorsque η tend vers 0.

ii. Montrer avec soin la continuité de $t \mapsto \int_0^t f(t, u) du$ sur $[0, a]$.

iii. Calculer la dérivée de la fonction $F(x) = \int_0^x dt \left(\int_0^t f(t, u) du \right)$.

2-b) Pour tous $0 \leq \alpha, \beta \leq a$, on introduit $h(\alpha, \beta) = \int_0^\alpha du \left(\int_u^\beta f(t, u) dt \right)$.

i. Expliciter la dérivée partielle $\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, \beta)$.

ii. Expliciter $\frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha, \beta)$.

iii. Donner alors une expression de la dérivée de $G(x) = \int_0^x du \left(\int_u^x f(t, u) dt \right)$.

2-c) Dédurre de ce qui précède une preuve de l'égalité (E_2) .

3) Pour $f, g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ des fonctions continues, on définit leur produit de convolution

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

3-a) Montrer que $f * g$ est continue sur $[0, +\infty[$.

3-b) Montrer que le produit de convolution est commutatif.

3-c) Montrer que le produit de convolution est associatif.

4) Une fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ continue est dite d'ordre exponentiel s'il existe des réels $M > 0$ et r tels que pour tout $t \geq 0$, on a $|f(t)| \leq Me^{rt}$. Pour une telle fonction f , on définit alors sa transformée de Laplace

$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

4-a) Montrer que $\mathcal{L}(f)(s)$ est bien définie pour tout réel s assez grand.

4-b) Montrer que si f est de classe C^1 avec f et f' d'ordre exponentiel, alors pour s assez grand, $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$.

4-c) Soient f et g des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ et d'ordre exponentiel. Montrer que $f * g$ est d'ordre exponentiel.

4-d) Sous les hypothèses de la question précédente, en utilisant (E_2) pour $a = +\infty$, montrer que, pour s assez grand,

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\mathcal{L}(g)(s).$$

5) On cherche à présent à montrer que $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s)$ pour tout s assez grand si et seulement si $f = g$.

5-a) Justifier qu'on peut se ramener à chercher les fonctions f telles que $\mathcal{L}(f)(s) = 0$ pour tout s assez grand.

- 5-b) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que pour tout $n \geq 0$, on a $\int_a^b x^n f(x) dx = 0$. Montrer que $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ et en déduire que f est la fonction nulle.

Indication : on pourra utiliser, sans justification, le théorème d'approximation de Weierstrass qui établit l'existence pour tout $\epsilon > 0$, d'un polynôme $p_\epsilon \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_\epsilon(x)| \leq \epsilon$.

- 5-c) En déduire que $\mathcal{L}$ est injective.

Indication : on pourra utiliser un changement de variable $y = e^{-t}$.

Dans la suite du problème le candidat pourra librement utiliser les résultats de ces préliminaires dans le cas où les fonctions ne sont plus nécessairement continues en 0 mais y sont seulement intégrables.

A- Intégration fractionnaire

- 6) Pour $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et intégrable en 0, on note $I(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$ et pour tout $n \geq 2$ on définit par récurrence

$$I^n(f)(x) := I^{n-1}(I(f))(x).$$

Montrer que $I^2 f(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$ puis que

$$I^n(f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

- 7) Pour tout réel $\alpha \in \mathbf{R}$, on note $\Phi_\alpha :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

en convenant que pour $\alpha \in \mathbf{Z}$ négatif ou nul, Φ_α est la fonction nulle.

- 7-a) Quelle est la dérivée m -ème de Φ_α ?

- 7-b) Montrer, en utilisant (E_1) , que pour tout α, β des réels strictement positifs, on a $\Phi_\alpha * \Phi_\beta = \Phi_{\alpha+\beta}$.

- 7-c) Expliciter $\mathcal{L}(\Phi_\alpha)(s)$ pour $\alpha > 0$.

8) Pour tout réel $\alpha > 0$, on définit

$$J^\alpha(f)(x) = \Phi_\alpha * f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-u)^{\alpha-1} f(u) du,$$

et on note J^0 l'opérateur identité, i.e. $J^0(f)(x) = f(x)$. D'après la question 6), pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $J^n = I^n$.

- 8-a) Montrer que pour tous réels α, β positifs, on a $J^\alpha \circ J^\beta = J^{\alpha+\beta}$.
- 8-b) On suppose f d'ordre exponentiel. Pour $\alpha > 0$, montrer que $\mathcal{L}(J^\alpha f)(s)$ est bien défini pour s assez grand et égal alors à $s^{-\alpha} \mathcal{L}(f)(s)$.
- 8-c) Pour α et γ des réels strictement positifs, montrer que $J^\alpha \Phi_\gamma = \Phi_{\gamma+\alpha}$.
- 8-d) Soit f d'ordre exponentiel et soit $\alpha > 0$. Montrer que $J^\alpha f$ est la fonction nulle si et seulement si f est la fonction nulle.

B- Dérivées fractionnaires

On note D l'opération de dérivation usuel, $D(f)(x) = f'(x)$ lorsque f est dérivable. Par récurrence, lorsque cela est possible, on définit $D^n(f) = D(D^{n-1}f)$ de sorte que trivialement $D^n \circ J^n$ est l'opérateur identité.

- 9) Pour f dérivable n fois, montrer que $J^n \circ D^n(f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$.
- 10) Etant donné un réel $\alpha > 0$, on note m l'entier tel que $m-1 < \alpha \leq m$, et on définit $D^\alpha := D^m \circ J^{m-\alpha}$, i.e., sous réserve d'existence,

$$D^\alpha f(t) = \begin{cases} D^m \left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^{\alpha+1-m}} du \right) & m-1 < \alpha < m, \\ D^m f(t) & \alpha = m, \end{cases}$$

et on note D^0 l'opérateur identité.

Remarque : on ne demande pas au candidat de donner des conditions nécessaires pour l'existence de $D^\alpha f$.

- 10-a) Pour tout $\alpha > 0$, expliciter $D^\alpha \circ J^\alpha$
- 10-b) Pour $f = 1$ expliciter $D^\alpha 1$ et préciser pour quel α , la fonction $D^\alpha 1$ est la fonction nulle.

10-c) Pour $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$, montrer que $D^\alpha \Phi_\gamma = \Phi_{\gamma-\alpha}$.

10-d) Pour f d'ordre exponentiel, montrer que $D^\alpha f$ est la fonction nulle si et seulement si f s'écrit sous la forme $f(x) = \sum_{j=1}^m c_j x^{\alpha-j}$ où $m-1 < \alpha \leq m$.

11) Loi des exposants.

11-a) Soit $f(t) = \Phi_{1/2}(t)$ et $\alpha = \beta = 1/2$. Calculer $(D^\alpha \circ D^\beta)f$ et $D^{\alpha+\beta}f$.

11-b) Soit $g = \Phi^{3/2}$, $\alpha = 1/2$ et $\beta = 3/2$. Calculer $(D^\alpha \circ D^\beta)g$, $(D^\beta \circ D^\alpha)g$ et $D^{\alpha+\beta}g$.

11-c) Soit $f(t) = t^\lambda \eta(t)$ où $\lambda > -1$ et $\eta(t) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \frac{t^n}{n!}$ admet un rayon de convergence $R > 0$. Montrer alors que pour tout $0 \leq t < R$, $0 \leq \beta < \lambda + 1$ et $\alpha \geq 0$, on a $(D^\alpha \circ D^\beta)f = D^{\alpha+\beta}f$.

12) Soit un réel $\alpha > 0$ et $m-1 < \alpha \leq m$. On pose alors, sous réserve d'existence, $D_*^\alpha f := J^{m-\alpha} \circ D^m f$, i.e.

$$D_*^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(u)}{(t-u)^{\alpha+1-m}} du, & m-1 < \alpha < m \\ D^m f(t) & \alpha = m. \end{cases}$$

12-a) Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^m$, telle que $D_*^\alpha f$ est bien définie et égale à la fonction nulle. Montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à $m-1$.

12-b) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et soit $0 < \alpha < 1$. Montrer que $(D \circ J^\alpha)f(x) = (J^\alpha \circ D)f(x) + f(0)\Phi_\alpha(x)$.

12-c) Soit $m-1 < \alpha < m$ et soit f de classe $\mathcal{C}^m([0, +\infty[, \mathbf{R})$. Sous réserve d'existence de tous les termes, montrer que

$$D^\alpha f(x) = D_*^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0).$$

12-d) En déduire que $D^\alpha \left(f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) = D_*^\alpha f(x)$.

C- Deux équations différentielles fractionnaires

13) Pour $0 < \alpha < 1$, l'équation d'Abel en g est

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{g(u)}{(t-u)^{1-\alpha}} du = f(t),$$

où f est une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ et d'ordre exponentiel.

13-a) Exprimer $g(t)$ en fonction de $f(t)$ à l'aide de l'opérateur D^α .

13-b) On suppose que g est d'ordre exponentiel. Exprimer la transformée de Laplace de g en fonction de celle de f .

14) Pour $\alpha \geq 0$ on introduit la série entière

$$E_\alpha(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{\Gamma(1 + \alpha k)}.$$

14-a) Calculer $E_0(\theta)$, $E_1(\theta)$ et $E_2(-\theta^2)$.

14-b) Montrer que le rayon de convergence de $E_\alpha(\theta)$ est strictement positif.

14-c) On pose $e_\alpha(t) = E_\alpha(-(t^\alpha))$ et on admet qu'il est d'ordre exponentiel. Montrer que pour $s > 1$, on a $\mathcal{L}(e_\alpha)(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha+1}}$.

14-d) On pose $u_k(t) := J^k e_\alpha(t)$. Montrer que $\mathcal{L}(u_k)(s) = \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^{\alpha+1}}$.

15) On cherche à résoudre l'équation $D_*^\alpha u(t) = -u(t)$. Montrer qu'après application de l'opérateur J^α , cette équation devient

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{t^k}{k!} - J^\alpha u(t),$$

où on précisera les c_k .

16) On suppose que $u(t)$ est d'ordre exponentiel. Montrer que

$$\mathcal{L}(u)(s) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{s^{k+1}} - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}(u)(s),$$

et en déduire que $u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k u_k(t)$.

FIN DE L'ÉPREUVE