ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2021

JEUDI 15 AVRIL 2021
08h00 - 14h00
FILIERE MP - Epreuve n° 7

MATHEMATIQUES D (U)

Durée : 6 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Le sujet comprend 7 pages, numérotées de 1 à 7.

***

Début du sujet

Produit de matrices aléatoires: le théorème de Furstenberg–Kesten

Notations : Dans tout le problème, $d \geqslant 1$ est un entier fixé. On note $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées $d \times d$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathsf{GL}_d(\mathbb{C})$ le sous-ensemble des matrices inversibles. On note $\|\cdot\|$ la norme usuelle $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^d |x_i|^2}$ sur $\mathbb{C}^d$ et $|||\cdot|||$ sa norme opérateur associée i.e

$$|||A||| = \sup\{\|Ax\| : x \in \mathbb{C}^d \text{ tel que } \|x\| = 1\}, \quad \text{pour } A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}).$$

Si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ sont des variables aléatoires réelles, on dit que (X_n) *converge en probabilité* vers $\ell \in \mathbb{R}$, et on note $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X_n - \ell| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On considère μ une mesure de probabilité sur $\mathsf{GL}_d(\mathbb{C})$ de support $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ fini, i.e. pour $1 \leqslant i \leqslant k$

$$\mu(\{s_i\}) = p_i \quad \text{avec } p_1, p_2, \cdots, p_k > 0, \quad p_1 + \cdots + p_k = 1.$$

On suppose construit, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, une suite $M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(n)}, \dots$ de matrices aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathcal{S}$ identiquement distribuées de loi μ. Le but principal du problème est d'étudier le produit de matrices aléatoires inversibles

$$\Psi_n := M^{(n)} \cdot M^{(n-1)} \cdots M^{(1)}$$

quand $n \to \infty$ et d'établir le théorème de Furstenberg–Kesten (1960): il existe une constante $\ell(\mu) \in \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{1}{n} \log |||\Psi_n||| \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \ell(\mu). \tag{1}$$

Les parties **I,II, III** et **IV** sont relativement indépendantes. Les résultats nécessaires sont rappelés en début de chaque partie. À part dans la question préliminaire ci-dessous on suppose $d \geqslant 2$.

0). Question préliminaire. Dans cette question uniquement, $d = 1$, c'est-à-dire que l'on considère un produit $\Psi_n = Z^{(n)} \cdots Z^{(1)}$ de nombres aléatoires indépendants de loi μ sur $\mathbb{R}^*$ à support fini. En appliquant la loi faible des grands nombres, montrer que

$$\frac{1}{n} \log |\Psi_n| \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \mathbb{E}[\log |Z^{(1)}|].$$

Partie I. Puissance d'une matrice et théorème de Gelfand

Fixons $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ une matrice non nulle. Dans cette section, on étudie le comportement du produit A^n pour $n \geqslant 1$. On introduit

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathsf{Spec}(A)\},$$

*où $\mathsf{Spec}(A)$ est l'ensemble des valeurs propres (complexes) de A. Le but de cette partie est de montrer le théorème de Gelfand en question **I.4)**.*

1). Soit $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Montrer que $|||AB||| \leqslant |||A||| \cdot |||B|||$.

2). Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $\rho(A)^n \leqslant |||A^n|||$.

3). On suppose que $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ est triangulaire supérieure.

a). Montrer que pour $i \leqslant j$ on peut écrire

$$(A^n)_{i,j} = \sum_{i_1,j_1,i_2,j_2,\ldots,i_n,j_n \in \mathcal{E}_n(i,j)} a_{i_1,j_1} a_{i_2,j_2} \cdots a_{i_n,j_n},$$

où $\mathcal{E}_n(i,j)$ est l'ensemble des indices $1 \leqslant i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n \leqslant d$ satisfaisant

- $i = i_1$, $j_1 = i_2, j_2 = i_3, \ldots, j_{n-1} = i_n$ et $j_n = j$,
- $i_k \leqslant j_k$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,
- $i_k \neq j_k$ pour au plus $d-1$ valeurs de $1 \leqslant k \leqslant n$.

b). En reliant $\#\mathcal{E}_n(i,j)$ au cardinal des suites $(u_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ strictement croissantes de $n+1$ entiers telles que $u_0 = 0$ et $u_n = n + (j-i)$, montrer que

$$\#\mathcal{E}_n(i,j) = \binom{n-1+(j-i)}{n-1}.$$

c). En déduire qu'il existe une constante $C_A > 0$ telle que pour tout $n \geqslant d$, les coefficients de A^n sont bornés en valeur absolue par

$$C_A \cdot n^{d-1} \cdot \rho(A)^n.$$

4). (On revient au cas général, A n'est plus forcément triangulaire supérieure). En déduire le **théorème de Gelfand** (1941)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |||A^n||| = \log \rho(A) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

5). Soit $N(\cdot)$ une norme quelconque sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Montrer que l'on a également $\frac{1}{n}\log N(A^n) \to \log \rho(A)$ quand $n \to \infty$.

Les dernières questions de cette partie donnent des raffinements autour du théorème de Gelfand. Les résultats ne seront pas utilisés dans la suite.

6). a). En utilisant le théorème de Cayley–Hamilton, montrer que

$$|||A^d||| \leqslant \sum_{k=1}^{d} \binom{d}{k} \rho(A)^k |||A^{d-k}|||$$

et en déduire que $|||A^d||| \leqslant (2^d-1)\rho(A)|||A|||^{d-1}$.

b). Si $A \neq \mathbf{0}$, montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$\frac{|||A^{nd}|||}{(2^d-1)|||A^n|||^{d-1}} \leqslant \rho(A)^n \leqslant |||A^n|||,$$

et que $\left(\frac{|||A^{nd}|||}{(2^d-1)|||A^n|||^{d-1}}\right)^{1/n} \to \rho(A)$ quand $n \to \infty$.

c). Montrer que $A \mapsto \rho(A)$ est continue.

Partie II. Exposants de Lyapunov via la sous-additivité

Dans cette partie, on montre une version "en espérance" de (1) en utilisant les propriétés des suites sous-additives. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite prenant ses valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On dit que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est sous-additive *si pour tout $n, m \geqslant 1$ on a*

$$u_{n+m} \leqslant u_n + u_m.$$

1). Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite sous-additive.

a). Soit $k_0 \geqslant 1$, en utilisant la division Euclidienne de n par k_0 montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_{k_0}}{k_0} + \frac{\max_{1\leqslant i\leqslant k_0-1} u_i}{n}.$$

b). Lemme de Fekete. En déduire que

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf_{k\geqslant 1} \frac{u_k}{k} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

On pourra traiter séparément le cas où $\inf_{k\geqslant 1} \frac{u_k}{k} = -\infty$ de celui où il est fini.

2). Applications aux matrices aléatoires. *Avec les notations introduites au début du sujet.*

a). Montrer qu'il existe des constantes $\alpha, \beta > 0$ dépendantes de $\mathcal{S}$ seulement telles que pour tout $\omega \in \Omega$ on a

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \alpha^n \leqslant |||\Psi_n(\omega)||| \leqslant \beta^n.$$

b). Montrer que

$$(\mathbb{E}[\log|||\Psi_n|||])_{n\geqslant 1} \quad \text{et} \quad (\log \mathbb{E}[|||\Psi_n|||])_{n\geqslant 1}$$

sont sous-additives.

c). En déduire qu'il existe des constantes $\ell(\mu), \xi(\mu) \in [\log\alpha, \log\beta]$ telles que

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[\log|||\Psi_n|||] \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell(\mu) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\log\mathbb{E}[|||\Psi_n|||] \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\mu). \tag{2}$$

3). **Premières propriétés.**

a). Montrer que $\ell(\mu) \leqslant \xi(\mu)$ et donner un exemple où l'inégalité est stricte.

b). Montrer que $\ell(\mu) \geqslant \mathbb{E}\left[\log\left(|\det(M^{(1)})|^{1/d}\right)\right]$ et que $\xi(\mu) \geqslant \log\mathbb{E}[|\det(M^{(1)})|^{1/d}]$.

c). Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ on introduit la norme

$$N(A) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} |a_{i,j}|.$$

Si M est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ on notera $\mathbb{E}[M]$ la matrice des espérances des coefficients de M.

i. Montrer que l'on a

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[\log N(\Psi_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell(\mu) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\log\mathbb{E}[N(\Psi_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\mu).$$

ii. On suppose dans cette question seulement que la matrice aléatoire $M^{(1)}$ n'a que des coefficients positifs, c'est-à-dire que les matrices $\{s_1, \ldots, s_k\}$ du support de μ sont toutes à coefficients positifs. Montrer alors que

$$\mathbb{E}[N(\Psi_n)] = N\left(\left(\mathbb{E}[M^{(1)}]\right)^n\right)$$

et en déduire que $\xi(\mu) = \log\rho(\mathbb{E}[M^{(1)}])$.

iii. Dans le cas général du sujet montrer que

$$\xi(\mu) \leqslant \log\rho(\mathbb{E}[|M^{(1)}|])$$

où pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ on note $|A| = (|a_{i,j}|)_{1\leqslant i,j\leqslant d}$.

Partie III. Calcul de $\ell(\mu)$ et $\xi(\mu)$ dans des cas particuliers

*On rappelle la définition de $\ell(\mu)$ et $\xi(\mu)$ vue en **II.2.c)**. Bien entendu, dans le cas où les matrices $M^{(i)}$ sont déterministes et égales à A, on obtient $\xi(\mu) = \ell(\mu) = \log\rho(A)$ d'après le théorème de Gelfand **I.4)**. Dans cette section, on trouve une formule explicite de $\ell(\mu)$ et de $\xi(\mu)$ dans certains cas très particuliers.*

1). Matrices diagonales. On suppose dans cette question que $\mathrm{Supp}(\mu)$ est un sous ensemble fini des matrices *diagonales* de $\mathsf{GL}_d(\mathbb{C})$. C'est-à-dire que l'on peut écrire pour tout $\omega \in \Omega$

$$M^{(i)}(\omega) = \begin{pmatrix} M_{1,1}^{(i)}(\omega) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_{d,d}^{(i)}(\omega) \end{pmatrix} \quad \text{avec } M_{k,k}^{(i)}(\omega) \neq 0.$$

a). Montrer que

$$\ell(\mu) \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant d} \mathbb{E}[\log|M_{k,k}^{(1)}|] \quad \text{et} \quad \xi(\mu) \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant d} \log \mathbb{E}[|M_{k,k}^{(1)}|].$$

b). Montrer que $\xi(\mu) = \max_{1\leqslant k\leqslant d} \log \mathbb{E}[|M_{k,k}^{(1)}|]$.

c). Montrer que $\ell(\mu) = \max_{1\leqslant k\leqslant d} \mathbb{E}[\log|M_{k,k}^{(1)}|]$.

2). Matrices commutantes. On suppose cette fois-ci que toutes les matrices du support $\mathcal{S}$ de μ commutent.

a). Montrer qu'on peut trouver une base $\mathcal{B}$ dans laquelle toutes les matrices de $\mathcal{S}$ sont triangulaires supérieures.

b). Montrer que

$$\ell(\mu) \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant d} \mathbb{E}[\log|\mathfrak{M}_{k,k}^{(1)}|] \quad \text{et} \quad \xi(\mu) = \max_{1\leqslant k\leqslant d} \log \mathbb{E}[|\mathfrak{M}_{k,k}^{(1)}|]$$

où $\mathfrak{M}^{(1)} = (\mathfrak{M}_{i,j}^{(1)})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ est l'écriture de la matrice aléatoire $M^{(1)}$ dans la base $\mathcal{B}$ de la question précédente.

Nous montrerons que $\ell(\mu) = \max_{1\leqslant k\leqslant d} \mathbb{E}[\log|\mathfrak{M}_{k,k}^{(1)}|]$ *à la fin de la partie* ***IV***.

3). L'échangeur. *Dans cette question, on considère la mesure de probabilité* μ_p *pour* $p \in [0,1]$ *définie par* $\mu_p = p\delta_D + (1-p)\delta_R$ *où*

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on notera $M^{(i)}$ *pour* $i \geq 1$ *(la dépendance en* p *est implicite) des matrices aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi* μ_p*. C'est-à-dire que* $M^{(i)} = D$ *avec probabilité* p *et* $M^{(i)} = R$ *avec probabilité* $(1-p)$ *indépendamment pour tout* $i \geqslant 1$*. On écrira* $e_1 = (1,0)$ *et* $e_2 = (0,1)$ *pour la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

a). Calculer $\ell(\mu_0), \xi(\mu_0), \ell(\mu_1)$ et $\xi(\mu_1)$.

On fixe maintenant $p \in]0,1[$ et pour $1 \leqslant i \leqslant n$ on note les variables aléatoires

$$\chi_i = \begin{cases} 0 & si \quad M^{(i)} = R \\ 1 & si \quad M^{(i)} = D \text{ et } \#\{1 \leqslant j \leqslant i : M^{(j)} = R\} \text{ est pair} \\ -1 & si \quad M^{(i)} = D \text{ et } \#\{1 \leqslant j \leqslant i : M^{(j)} = R\} \text{ est impair.} \end{cases}$$

b). Montrer que

$$\|\Psi_n e_1\| = 2^{\sum_{i=1}^n \chi_i} \quad \text{et} \quad \|\Psi_n e_2\| = 2^{-\sum_{i=1}^n \chi_i},$$

et en déduire que $|||\Psi_n||| = 2^{|\sum_{i=1}^n \chi_i|}$.

c). Pour $i \geqslant 1$ prouver que $\mathbb{E}[\chi_i] = p(2p-1)^{i-1}$ et en déduire $\mathbb{E}[\chi_i \chi_j] = p^2(2p-1)^{j-i-1}$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

d). Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \chi_i\right)^2\right] \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

e). En déduire que $\ell(\mu_p) = 0$ pour $p \in]0,1[$.

f). Avec les notations de la question **II.3).c)**, montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $\mathbb{E}[N(\Psi_n)] = N\Big(\big(\mathbb{E}[|M^{(1)}|]\big)^n\Big)$.

g). En déduire que pour tout $p \in]0,1[$ on a

$$\xi(\mu_p) = \log\left(\frac{5p + \sqrt{16 - 32p + 25p^2}}{4}\right).$$

*Dans la suite du problème, on se focalisera sur la constante $\ell(\mu)$ définie en **II.2).c)**. Nous allons voir que cette constante gouverne le comportement "typique" (i.e. avec grande probabilité) de la norme de $|||\Psi_n|||$, contrairement à $\xi(\mu)$ qui peut être influencée par les valeurs "atypiques" de $|||\Psi_n|||$.*

Partie IV. Le théorème de Furstenberg–Kesten

*Dans cette section, on établit le théorème de Furstenberg–Kesten (1) en "renforçant" la convergence en espérance obtenue dans **II.2)** en une convergence en probabilité. On rappelle que $\Psi_n = M^{(n)} \cdots M^{(1)}$ est un produit de n matrices aléatoires, identiquement distribuées et de même loi μ de support fini $\mathcal{S} \subset \mathsf{GL}_d(\mathbb{C})$.*

1). Soit $k_0 \geqslant 1, n \geqslant 1$ et écrivons $n = qk_0 + r$ la division Euclidienne de n par k_0. Montrer que l'on peut écrire

$$|||\Psi_n||| \leqslant |||Q_{k_0}^{(1)}||| \cdot |||Q_{k_0}^{(2)}||| \cdots |||Q_{k_0}^{(q)}||| \cdot |||Q_r|||,$$

où les $Q_{k_0}^{(i)}$ sont indépendantes, de même loi que Ψ_{k_0}, et également indépendantes de Q_r qui a la même loi que Ψ_r.

2). En appliquant la loi faible des grands nombres, déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\log|||\Psi_n||| \geqslant \ell(\mu)+\varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

3). Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans $[a,b] \subset \mathbb{R}$ satisfaisant pour un certain $\ell \in [a,b]$:

- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \ell$,
- $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant \ell+\varepsilon) = 1$.

Prouver que $X_n \to \ell$ en probabilité quand $n \to \infty$.

4). En déduire le **Théorème de Furstenberg–Kesten** (1960) :

$$\frac{1}{n}\log|||\Psi_n||| \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \ell(\mu).$$

*Voyons une application de ce résultat à l'exemple étudié en **III. 2)**.*

5). Avec les mêmes hypothèses et notations qu'en **III.2).b)**, nous allons montrer que

$$\ell(\mu) \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant d} \mathbb{E}[\log|\mathfrak{M}_{k,k}^{(1)}|].$$

On commencera par le cas $d=2$ et on écrira

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} X_{1,1}^{(n)} & X_{1,2}^{(n)} \\ 0 & X_{2,2}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell(\mu) > \max_{1\leqslant k\leqslant 2} \mathbb{E}[\log|\mathfrak{M}_{k,k}^{(1)}|]$.

a). Montrer alors que $\frac{1}{n}\log|X_{1,2}^{(n)}| \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \ell(\mu)$.

b). En écrivant

$$X_{1,2}^{(2n)} = X_{1,1}^{(n)}\tilde{X}_{1,2}^{(n)} + X_{1,2}^{(n)}\tilde{X}_{2,2}^{(n)},$$

où $(\tilde{X}_{i,j}^{(n)})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$ et $(X_{i,j}^{(n)})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$ sont deux copies indépendantes de Ψ_n, aboutir à une contradiction.

c). Comment procéderiez-vous dans le cas général $d \geqslant 2$?

***

Fin du sujet.

Ce théorème établi en 1960 par Hillel Furstenberg (1935–) et Harry Kesten (1931–2019) peut être vu comme une généralisation de la loi des grands nombres au cas du produit non-commutatif de matrices aléatoires. Il a de nombreuses applications dans la théorie des systèmes dynamiques. Hélas, le calcul explicite de $\ell(\mu)$, même dans des cas très simples, est souvent impossible.