Mines-Ponts Maths 2 2022 (MP)

Pandou

21 avril 2022

1 Questions préliminaires

1. Par continuité du produit matriciel, on a

$$\begin{aligned} Ae^B &= A\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{B^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{AB^n}{n!} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{B^nA}{n!} \\ &= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{B^n}{n!}\right)A \\ &= e^BA \end{aligned}$$

2. La fonction $g = f_{A+B}f_{-B}$ est dérivable et on a

$$g' = (A+B)f_{A+B}f_{-B} - Bf_{A+B}f_{-B} = Ag$$

et $g(0) = I_n$.

Ainsi, f_A et g sont toutes deux solutions du problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{lcl} y' & = & Ay \\ y(0) & = & I_n \end{array}\right.$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, on en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_A(t) = g(t)$$

Cette égalité se réécrit

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$$

3. En dérivant successivement l'égalité, on trouve

$$(A+B)e^{t(A+B)} = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB}$$

$$(A+B)^2e^{t(A+B)} = A^2e^{tA}e^{tB} + Ae^{tA}Be^{tB} + Ae^{tA}Be^{tB} + e^{tA}B^2e^{tB}$$

Et on prend $t = 0$ pour avoir

$$A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Ainsi,

$$AB = BA$$

A et B commutent.

4. Soit $A \in M_n(K)$, on a par sous-multiplicativité et continuité de la norme

$$\begin{aligned} \|e^A\| &= \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{A^n}{n!}\right\| \\ &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\|A^n\|}{n!} \\ &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\|A\|^n}{n!} \\ &= e^{\|A\|} \end{aligned}$$

5. On trigonalise A dans $M_n(\mathbb{C})$: $A = PTP^{-1}$ où la diagonale de T est $(a_1, ..., a_n)$. Alors, $\exp(A) = Pe^T P^{-1}$ où la diagonale de e^T est $(e^{a_1}, ..., e^{a_n})$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \det(e^A) &= \prod_{i=1}^n e^{a_i} \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \\ &= \exp\big(\mathrm{Tr}(A)\big) \end{aligned}$$

2 Formule de Trotter-Kato

6. On utilise 4. :

$$\begin{aligned} \|X_k\| &\leqslant \left\|\exp\left(\frac{A}{k}\right)\right\| \left\|\exp\left(\frac{B}{k}\right)\right\| \\ &\leqslant \exp\left(\frac{\|A\|}{k}\right)\exp\left(\frac{\|B\|}{k}\right) \\ &= \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right) \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \|Y_k\| &= \left\|\exp\left(\frac{A+B}{k}\right)\right\| \\ &\leqslant \exp\left(\frac{\|A+B\|}{k}\right) \\ &\leqslant \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right) \end{aligned}$$

7. On a

$$X_k - Y_k = \exp\left(\frac{A}{k}\right)\exp\left(\frac{B}{k}\right) - \exp\left(\frac{A+B}{k}\right) = h\left(\frac{1}{k}\right)$$

On fait un développement limité en 0 :

$$\begin{aligned} h(t) &= \big(I_n + tA + O(t^2)\big)\big(I_n + tB + O(t^2)\big) - \big(I_n + t(A+B) + O(t^2)\big) \\ &= I_n + tA + tB + O(t^2) - I_n - t(A+B) + O(t^2) \\ &= O(t^2) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$X_k - Y_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Une étude un peu plus approfondie aurait pu donner la constante du O. D'ailleurs, pour des raisons de calligraphie, il est peut être plus raisonnable de n'utiliser que les o.

8. On calcule le téléscopage

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i (X_k - Y_k) Y_k^{k-i-1} &= \sum_{i=0}^{k-1} \big(X_k^{i+1} Y_k^{k-(i+1)} - X_k^i Y_k^{k-i}\big) \\ &= X_k^k - Y_k^k \end{aligned}$$

On utilise la majoration de 6.

$$\begin{aligned} \left\|\left[\exp\left(\frac{A}{k}\right)\exp\left(\frac{B}{k}\right)\right]^k - \exp(A+B)\right\| &= \|X_k^k - Y_k^k\| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \|X_k\|^i \|Y_k\|^{k-i-1} \|X_k - Y_k\| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)^{i+k-i-1} \|X_k - Y_k\| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)^{k} \|X_k - Y_k\| \end{aligned}$$

car $k-1 \leqslant k$. On continue :

$$\begin{aligned}\left\|\left[\exp\left(\frac{A}{k}\right)\exp\left(\frac{B}{k}\right)\right]^k - \exp(A+B)\right\| &\leqslant ke^{\|A\|+\|B\|}\|X_k - Y_k\| \\ &= O\left(\frac{1}{k}\right) \\ &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

d'après 7.. Et donc, on a

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{A}{k}\right)\exp\left(\frac{B}{k}\right)\right)^k = \exp(A+B)$$

3 Vers les algèbres de Lie

9. Soit $M \in \mathcal{A}_{SL_n(\mathbb{R})}$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, e^{tM} \in SL_n(\mathbb{R})$. En particulier, on a $e^M \in SL_n(\mathbb{R})$ et donc $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Réciproquement, si $\mathrm{Tr}(M) = 0$, alors $\mathrm{Tr}(tM) = 0$ et donc $\det\left(e^{tM}\right) = e^{\mathrm{Tr}(tM)} = 1$ et donc $e^{tM} \in SL_n(\mathbb{R})$.

   On a montré que
$$\mathcal{A}_{SL_n(\mathbb{R})} = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(M) = 0\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$$

10. Si $M \in \mathcal{A}_{O_n(\mathbb{R})}$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, e^{tM} \in O_n(\mathbb{R})$, ce qui donne $e^{tM}(e^{tM})^T = I_n$ et donc en dérivant et en prenant $t = 0$, on trouve $M + M^T = 0$, ie M est antisymétrique.
   Réciproquement, si $M \in A_n(\mathbb{R})$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, e^{tM}(e^{tM})^T = e^{tM}e^{-tM} = I_n$. Donc, $e^{tM} \in O_n(\mathbb{R})$.

   On a donc montré que
$$\mathcal{A}_{O_n(\mathbb{R})} = A_n(\mathbb{R})$$

11. Déjà, $0 \in \mathcal{A}_G$. Ensuite, si $M \in \mathcal{A}_G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{t\lambda M} \in G$$
   et donc $\lambda M \in \mathcal{A}_G$.

   Soit $A, B \in \mathcal{A}_G$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a
$$\exp\big(t(A+B)\big) = \lim_{k\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{t}{k}A\right)\exp\left(\frac{t}{k}B\right)\right)^k \in G$$
   car G est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $A + B \in \mathcal{A}_G$.

12. Soit $\tau \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} e^{\tau u(t)} &= \exp\left(\tau e^{tA}Be^{-tA}\right) \\ &= e^{tA}e^{\tau B}e^{-tA} \in G\end{aligned}$$
   car $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$. Donc,
$$\forall t \in \mathbb{R}, u(t) \in \mathcal{A}_G$$

13. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$$u'(t) = Ae^{tA}Be^{-tA} - e^{tA}BAe^{-tA}$$
   Et on a
$$u'(0) = AB - BA$$
   Et on a $u'(0) \in \mathcal{A}_G$, car $u'(0) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{u(t)-u(0)}{t}$ et $\mathcal{A}_G$ est un sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$, donc est fermé. Ainsi,
$$[A, B] \in \mathcal{A}_G$$

14. Soit $M \in \mathcal{A}_G$, on définit $\gamma(t) = e^{tM}$ qui est un chemin dérivable dans G tel que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. On en déduit que
$$M \in \mathcal{T}_{I_n}(G)$$

15. On trigonalise M dans $M_n(\mathbb{C})$: $M = PTP^{-1}$ avec où la diagonale de T est $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. On a

$$\begin{aligned} \delta_M(t) &= \det(I_n + tM) \\ &= \det(I_n + tT) \\ &= \prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_i) \\ &= 1 + t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + o(t) \end{aligned}$$

On en déduit que δ_M est dérivable en 0 et

$$\delta_M'(0) = \mathrm{Tr}(M)$$

16. L'application det est différentiable, ainsi, det admet une dérivée dans toutes les directions et pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{d}\det(0) \cdot H = \delta_H'(0) = \mathrm{Tr}(H)$$

Et donc,

$$\mathrm{d}\det(0) = \mathrm{Tr}$$

17. Soit $M \in \mathcal{T}_{I_n}\big(SL_n(\mathbb{R})\big)$, alors on prend un chemin γ qui passe par I_n et de vitesse M dans $SL_n(\mathbb{R})$. Alors, on a $\det\big(\gamma(t)\big) = 1$. Par la règle de la chaîne, on a

$$\mathrm{d}\det\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t) = 0$$

Et on prend $t = 0$ pour trouver finalement, $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Ainsi, on a $\mathcal{T}_{I_n}\big(SL_n(\mathbb{R})\big) \subset \mathcal{A}_{SL_n(\mathbb{R})}$.
L'autre inclusion a été montrée en 14. D'où l'égalité.

Soit $M \in \mathcal{T}_{I_n}\big(O_n(\mathbb{R})\big)$, soit γ un chemin qui passe par I_n et de vitesse M dans $O_n(\mathbb{R})$. Alors, on a $\gamma(t)\gamma(t)^T = I_n$ pour tout t au voisinage de 0. Différentions cette relation :

$$\gamma'(t)\gamma(t)^T + \gamma(t)\gamma'(t)^T = 0$$

car la transposition est linéaire. Ainsi, en prenant $t = 0$, on trouve q

$$M + M^T = 0$$

Ainsi, M est antisymétrique et donc on a $\mathcal{T}_{I_n}\big(O_n(\mathbb{R})\big) \subset \mathcal{A}_{O_n(\mathbb{R})}$. L'inclusion réciproque aussi a été montrée en 14.. D'où l'égalité.

4 Comportement asymptotique

18. On a $\chi_T = (X - \alpha)(X - \beta)^2$, par le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{C}^3 = \underbrace{\mathrm{Ker}(T - \alpha I_n)}_{:=D} \oplus \underbrace{\mathrm{Ker}(T - \beta I_n)^2}_{:=P}$$

Soit t l'endomorphisme canoniquement associé à T, alors $t_{|P}$ est trigonalisable. Ainsi, il existe une base (e_2, e_3) de P dans laquelle la matrice de $t_{|P}$ est $\begin{pmatrix} \beta & a \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$.
Si e_1 est un vecteur propre de T associé à la valeur propre α, on en déduit que dans la base (e_1, e_2, e_3), la matrice de t est

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & a \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

On calcule par blocs, ça va plus vite :)

$$T^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 2a\beta \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, par une récurrence immédiate, on trouve

$$T^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & n\beta^{n-1}a \\ 0 & 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \exp(tT) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} T^n \\ &= \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\beta} & te^{t\beta}a \\ 0 & 0 & e^{t\beta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a $e^{tA} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si, et seulement si, $e^{tT} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Pour que la diagonale tende vers 0, il faut que $|e^{t\alpha}|, |e^{t\beta}| = e^{t\mathrm{Re}(\alpha)}, e^{t\mathrm{Re}(\beta)} \longrightarrow 0$, ce qui se produit seulement si, $\mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Re}(\beta) < 0$.
Réciproquement, si $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$ et $\mathrm{Re}(\beta) < 0$, alors on a $e^{t\alpha}, e^{t\beta} \longrightarrow 0$ et $te^{t\beta} \longrightarrow 0$ aussi.
Finalement,

$$\lim_{t\to+\infty} e^{tA} = 0 \iff \mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Re}(\beta) < 0$$

19. On trigonalise A : $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure, de diagonale $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Si $f_A(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors, $e^{t\lambda_1}, ..., e^{t\lambda_n} \longrightarrow 0$. Ainsi, on a nécesairement, $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ pour tout i : $\alpha < 0$.
20. Le polynôme caractéristique de A s'écrit $\chi_A = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} (X-\lambda)^{m_\lambda}$. Le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux donne

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \mathrm{Ker}\big((A-\lambda I_n)^{m_\lambda}\big) = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} F_\lambda$$

21. On vérifie facilement que chaque espace F_λ est stable par A. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Alors, $u_{|F_\lambda} - \lambda\mathrm{Id}_{F_\lambda}$ est un endomorphisme nilpotent de F_λ. Ainsi, on peut écrire $u_{|F_\lambda} = \lambda\mathrm{Id}_{F_\lambda} + n_\lambda$ où n_λ est un endomorphisme nilpotent de F_λ.
On considère une base de $\mathbb{C}^n$ adapté à la décomposition 20. de sorte que dans cette base la matrice de u est

$$\underbrace{\mathrm{diag}(\lambda_1 + ... + \lambda_n)}_{:=D} + \underbrace{\mathrm{diag}(n_{\lambda_1}, ..., n_{\lambda_n})}_{:=N}$$

où les λ_i forment le spectre avec répétition de A.
Il est clair que D et N commutent. Et par définition du changement de base, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$A = P(D+N)P^{-1}$$

Enfin, on a clairement

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i) = \chi_D$$

22. On écrit

$$e^{tA} = Pe^{t(D+N)}P^{-1} = Pe^{tD}e^{tN}P^{-1}$$

car D et N commutent.
Soit p l'indice de nilpotence de N, alors $e^{tN} = \sum_{k=0}^{p} \frac{t^k}{k!} N^k = O(t^p)$.
Enfin, on a $e^{tD} = \mathrm{diag}(e^{t\lambda_1}, ..., e^{t\lambda_n})$.
$v_{i,j}$ est une combinaison linéaire des $e^{t\lambda_i}$ et des termes $\frac{t^j}{j!} N^j$. Comme $|e^{t\lambda_i}| = e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)}$, on a

$$|v_{i,j}(t)| = O(t^p e^{\alpha t})$$

23. Si $\alpha < 0$, alors on a montré précédemment que

$$\|f_A(t)\|_\infty = \max_{i,j} |v_{i,j}(t)| = O(t^p e^{\alpha t}) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où,

$$\lim_{t\to+\infty} f_A(t) = 0$$

24. On trigonalise A : $A = P(D+N)P^{-1}$ avec D diagonale $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, N nilpotente qui commute avec D. Quitte à conjuguer, on suppose désormais que $A = D+N$ et on a $e^{tA} = e^{tD}e^{tN}$. e^{tA} ne comporte que des termes bornés (qui ne tend pas vers 0) ou qui divergent vers $+\infty$. Les termes de e^{tN} sont tous polynomiaux en t. On en déduit qu'aucune action, ni de e^{tA}, ni de e^{tN} ne peut faire converger $e^{tA}X$ vers 0 ... à moins que $X = 0$.
La réciproque est claire.

25. On a $\chi_A = P_S P_i P_n$ et donc par le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$E = E_s \oplus E_i \oplus E_n$$

Soit $X \in E$, on écrit $X = \begin{pmatrix} X_s \\ Y \end{pmatrix}$ avec $X_s \in E_s$ et $Y \in E_i \oplus E_n$. A est semblable à une matrice de la forme $\mathrm{diag}(A_s, B)$ où A_s est la matrice de la restriction de A à E_s et B la matrice de la restriction de A à $E_i \oplus E_n$ (où je fais la confusion entre matrice et l'application linéaire associée ... ne faites pas ça).
Quitte à conjuguer, on suppose donc que $A = \mathrm{diag}(A_s, B)$ et on a

$$\begin{aligned} e^{tA}X &= \begin{pmatrix} e^{tA_s} & 0 \\ 0 & e^{tB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_s \\ Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{tA_s}X_s \\ e^{tB}Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} o(1) \\ e^{tB}Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $X \in E_s$, alors $Y = 0$ et $e^{tA_s} \longrightarrow 0$, en particulier, on a $e^{tA_s}X_s \longrightarrow 0$ et donc on a bien $\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0$.

Réciproquement, si $\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0$, alors $\lim_{t\to+\infty} e^{tB}Y = 0$ et les valeurs propres de B ont pour parties réelles des réels positifs ou nulles. D'après 24., cela force $Y = 0$ et donc $X \in E_s$.

Finalement, on a

$$E_s = \left\{ X \in E, \lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0 \right\}$$

26. Supposons déjà que A n'a que des valeurs propres imaginaires pures. Quitte à conjuguer, on écrit $A = D+N$ avec D diagonale $(i\lambda_1, ..., i\lambda_n)$, N nilpotente qui commute avec D. De sorte que $e^{tA} = e^{tD}e^{tN}$.
Soit p l'indice de nilpotence de N, alors on a au voisinange de $\pm\infty$:

$$\|e^{tA}X\| = \|e^{tD}\|\|e^{tN}X\| = O\big(\|e^{tN}X\|\big)$$

Et enfin, $e^{tN}X = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{t^k}{k!} N^k X$, d'où $\|e^{tN}X\| = O(|t|^p)$ au voisinage de $\pm\infty$.

On en déduit donc que

$$\|e^{tA}X\| \leqslant C(1+|t|^p)$$

pour une certaine constante C.

Pour conclure dans le cas général, on regarde une décomposition $X = X_s + X_i + X_n$ comme dans 25. et on conclut que $X_s = 0$ en regardant au voisinage de $+\infty$ et que $X_n = 0$ en regardant au voisinage de $-\infty$.