Mines-Ponts Maths 2 2022 (PC)

Pandou

23 avril 2022

1 Norme d'opérateur sur $M_n(\mathbb{C})$

1. Σ_n est fermé comme image réciproque de 1 par la norme qui est continu et est borné, donc compact. L'application $X \longmapsto \|MX\|$ est continue sur le compact Σ_n donc atteint son maximum.

   Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $X \neq 0$, alors $\dfrac{X}{\|X\|} \in \Sigma_n$, donc $\left\|M\dfrac{X}{\|X\|}\right\| = \dfrac{\|MX\|}{\|X\|} \leqslant \|M\|_{\text{op}}$ et l'égalité est atteint pour un point de Σ_n d'après ce qui a été vu précédemment. Ainsi,

$$\|M\|_{\text{op}} = \max\left\{\frac{\|MX\|}{\|X\|}, X \neq 0\right\}$$

   En particulier, on a toujours $\|MX\| \leqslant \|M\|_{\text{op}}\|X\|$.

   Soit $M, M' \in M_n(\mathbb{C})$ et $X \neq 0$, alors $\|M'MX\| \leqslant \|M'\|_{\text{op}}\|MX\| \leqslant \|M'\|_{\text{op}}\|M\|_{\text{op}}\|X\|$. Donc, on a

$$\frac{\|M'MX\|}{\|X\|} \leqslant \|M'\|_{\text{op}}\|M\|_{\text{op}}$$

   Ainsi, prenant le maximum sur tous les $X \neq 0$, on trouve bien

$$\|M'M\|_{\text{op}} \leqslant \|M'\|_{\text{op}}\|M\|_{\text{op}}$$

   Remarque : Pour la pédagogie, rappelons pourquoi on a une norme.
   - Si $\|M\|_{\text{op}} = 0$, alors $\forall X \neq 0, \|MX\| = 0$, ie $\forall X, MX = 0$ et donc $M = 0$.
   - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $X \in \Sigma_n$, on a $\|\lambda MX\| = |\lambda|\|MX\| \leqslant |\lambda|\|M\|_{\text{op}}$ et on a égalité en un point X tel que $\|MX\|$ est maximal, d'où $\|\lambda M\|_{\text{op}} = |\lambda|\|M\|_{\text{op}}$.
   - Soit $M, M' \in M_n(\mathbb{C})$ et $X \in \Sigma_n$, on a

$$\|(M+M')X\| \leqslant \|MX\| + \|M'X\| \leqslant \|M\|_{\text{op}} + \|M'\|_{\text{op}}$$

     Ainsi, en prenant le sup sur $X \in \Sigma_n$, on trouve bien l'inégalité triangulaire

$$\|M+M'\|_{\text{op}} \leqslant \|M\|_{\text{op}} + \|M'\|_{\text{op}}$$

2. L'application $V \in \Sigma_n \longmapsto V^T U$ est bien définie et continue, ce qui justifie bien l'existence du maximum. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|V^T U| \leqslant \|V\|\|U\| = \|U\|$$

   car $V \in \Sigma_n$.
   Si $U = 0$, le résultat est clair. Sinon, on prend $V = \dfrac{\overline{U}}{\|U\|} \in \Sigma_n$, car $\|U\| = \|\overline{U}\|$ de sorte que

$$V^T U = \frac{1}{\|U\|}\overline{U^T}U = \frac{1}{\|U\|}\|U\|^2 = \|U\|$$

   Ainsi, on a bien

$$\max\left\{|V^T U|, V \in \Sigma_n\right\} = \|U\|$$

Le max est encore défini car $\Sigma_n \times \Sigma_n$ est compact comme produit de compacts et l'application $(X,Y) \longmapsto |X^T MY|$ est continue. Fixons $Y \in \Sigma_n$, le point précédent montre que

$$\max\left\{|X^T MY|, X \in \Sigma_n\right\} = \|MY\|$$

Ainsi, en prenant la borne supérieure sur $Y \in \Sigma_n$, on a

$$\max\left\{|X^T MY|, (X,Y) \in \Sigma_n \times \Sigma_n\right\} = \max\left\{\|MY\|, Y \in \Sigma_n\right\} = \|M\|_{\text{op}}$$

2 L'ensemble $\mathcal{B}_n$

3. On a $\|M^k X\| \leqslant \|M^k\|_{\text{op}}\|X\|$ et comme $\left(\|M^k\|_{\text{op}}\right)$ est bornée, la suite $\left(\|M^k X\|\right)_k$ est aussi bornée.

   Comme X est vecteur propre associé à λ, on a $MX = \lambda X$ et par récurrence immédiate, on a $M^k X = \lambda^k X$. Par le point précédent, on a $\left(\|M^k X\|\right) = \left(|\lambda|^k \|X\|\right)$ est bornée, donc $\left(|\lambda|^k\right)$ est bornée. Cela ne se produit que si $|\lambda| \leqslant 1$, ie
$$\sigma(M) \subset \mathbb{D}$$

4. On considère $M = I_n + N$ où N est une matrice nilpotente non nulle (trouvez-en une qui soit triangulaire supérieure stricte). On a $\sigma(M) = \{1\} \subset \mathbb{D}$. Comme I_n et N commutent, le binôme de Newton montre que
$$M^k = (I_n + N) = I_n + kN + ...$$
   Mais comme $N \neq 0$, on a que $\left(\|M^k\|_{\text{op}}\right)$ est non bornée.

3 Résolvante d'un élément de $M_n(\mathbb{C})$

5. Supposons que M est diagonale : $M = \text{diag}(a_1, ..., a_n)$. On a $\chi_M(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - a_i)$. Alors,
$$R_z(M) = \text{diag}\left(\frac{1}{z-a_1}, ..., \frac{1}{z-a_n}\right)$$
   De sorte que $P_{M,i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \prod\limits_{k \neq i}(z - a_k) & \text{si } i = j \end{cases}$ convient.

   Si $M \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable, on écrit $M = QDQ^{-1}$ avec $Q \in GL_n(\mathbb{C})$. Déjà, $\chi_M = \chi_D$, en effet, on a
$$R_z(M) = (zI_n - QDQ^{-1})^{-1} = Q\big(zI_n - D\big)^{-1} Q^{-1} = QR_z(D)Q^{-1}$$
   On écrit $Q = (a_{i,j})$ et $Q^{-1} = (b_{i,j})$ de sorte que
$$\big(R_z(M)\big)_{i,j} = \sum_{k,\ell=1}^{n} a_{i,k}\big(R_z(D)\big)_{k,\ell} b_{\ell,j}$$
   Ainsi, si $P_{M,i,j} \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ convient pour $R_z(D)$ (car D est diagonale, alors la famille
$$\widetilde{P_{M,i,j}} = \sum_{k,\ell=1}^{n} a_{i,k} P_{M,k,\ell} b_{\ell,j}$$
   convient et est toujours dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ (par exemple parce que $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ est un espace vectoriel).

6. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, on écrit
$$X^T R_z(M) Y = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \big(R_z(M)\big)_{i,j} y_j = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \frac{P_{M,i,i}(z)}{\chi_M(z)} y_j$$
   Ainsi, $P_{M,X,Y}(z) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_i P_{M,i,j} y_j$ convient (c'est bien un élément de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$).

7. On a $\left\|\dfrac{M^j}{z^{j+1}}\right\|_{\text{op}} = O\left(\dfrac{1}{|z|^{j+1}}\right)$ car $M \in \mathcal{B}_n$, et $\sum \dfrac{1}{|z|^{j+1}}$ converge car $|z| > 1$. Ainsi, par comparaison $\sum \left\|\dfrac{M^j}{z^{j+1}}\right\|_{\text{op}}$ converge et par le résultat admis, $\sum \dfrac{M^j}{z^{j+1}}$ converge dans $M_n(\mathbb{C})$ (car $M_n(\mathbb{C})$ est bien de dimension finie).

   On calcule
$$\begin{aligned}(zI_n - M)\sum_{j=0}^{m}\frac{M^j}{z^{j+1}} &= \sum_{j=0}^{m}\frac{M^j}{z^j} - \sum_{j=0}^{m}\frac{M^{j+1}}{z^{j+1}}\\ &= \frac{M^0}{z^0} - \frac{M^{m+1}}{z^{m+1}}\end{aligned}$$
   Ainsi, comme $\lim\limits_{m\to+\infty}\dfrac{M^{m+1}}{z^{m+1}} = 0$, on en déduit que
$$(zI_n - M)\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{M^j}{z^{j+1}} = I_n$$
   ce qui est le résultat voulu.

8. On a par inégalité triangulaire
$$\begin{aligned}\varphi_M(z) &= (|z|-1)\|R_z(M)\|_{\text{op}}\\ &\leqslant (|z|-1)\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{b(M)}{|z|^{j+1}}\\ &= (|z|-1)b(M)\frac{1}{|z|-1}\\ &= b(M)\end{aligned}$$

9. On a $|c_j e^{-i(j+1)t}| = |c_j|$ et $\sum |c_j|$ converge par hypothèse. La série définissant u est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc u est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   On calcule formellement
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)e^{i(k+1)t}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j=0}^{+\infty} c_j e^{i(j-k)t}\mathrm{d}t\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c_j e^{i(j-k)t}\mathrm{d}t\\ &= c_k\end{aligned}$$
   (Rappelons à des fins utiles que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0\\ 2\pi & \text{si } n = 0\end{cases}$.).

   L'interversion est justifiée sous convergence normale de $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} c_j e^{i(j-k)t}$.

10. On a
$$X^T R_{re^{it}}(M) Y = X^T\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{M^{j+1}}{r^{j+1}}e^{-i(j+1)t}\right)Y = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{X^T M^{j+1} Y}{r^{j+1}}e^{-i(j+1)t}$$
   Ainsi, on pose $c_j = \dfrac{X^T M^{j+1} Y}{r^{j+1}}$. Reste à vérifier que $\sum c_j$ converge absolument. On a d'après 2. :
$$\begin{aligned}|c_j| &= \frac{1}{r^{j+1}}\left|X^T M^{j+1} Y\right|\\ &\leqslant \frac{1}{r^{j+1}}\|M^{j+1}\|_{\text{op}}\\ &\leqslant \frac{b(M)}{r^{j+1}}\end{aligned}$$

et comme $r > 1$, on a bien $\sum \frac{b(M)}{r^{j+1}}$ qui converge. Par comparaison, $\sum |c_j|$ converge.

On en déduit par 9.

$$X^T M^j Y = \frac{r^{j+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^T R_{re^{it}}(M) Y e^{i(j+1)t} \mathrm{d}t$$

4 Variation totale et uniforme

11. Considérons $f_n(t) = e^{int}$, de sorte que $\|f_n\| = 1$ et

$$V(f_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \left|ine^{int}\right| \mathrm{d}t = 2\pi n$$

S'il existait une telle constante, on aurait

$$2\pi n \leqslant C$$

ce qui n'est pas possible.

12. Sur $]t_j, t_{j+1}[$, f' garde un signe constant, noté ε_j car f' est continue. Le signe de f' sur $]t_j, t_{j+1}[$ est le même que celui de $f(t_{j+1}) - f(t_j)$. On en déduit par la relation de Chasles que

$$\begin{aligned} V(f) &= \sum_{j=0}^{\ell} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varepsilon_j f' \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} \varepsilon_j \big(f(t_{j+1}) - f(t_j)\big) \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} \big|f(t_{j+1} - f(t_j)\big| \end{aligned}$$

On calcule en faisant attention à ce que les bornes soient dans le bon sens ...

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\ell} \int_{\mathbb{R}} \psi_j &= \sum_{j=0}^{\ell} \int_{f(t_j)}^{f(t_{j+1})} \varepsilon_j \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \big|f(t_{j+1}) - f(t_j)\big| \\ &= V(f) \end{aligned}$$

13. f est strictement monotone sur chaque intervalle $]t_j, t_{j+1}[$, en particulier elle y est injective. Ainsi, sur chaque $]t_j, t_{j+1}[$, il existe au plus un x_j tel que $f(x_j) = y$. Autrement dit, $\mathrm{Card}\big(f^{-1}(y) \cap]t_j, t_{j+1}[\big) \leqslant 1$. Ainsi, $f^{-1}(y) \cap [-\pi, \pi[$ est fini et :

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}\big(f^{-1}(y) \cap [-\pi, \pi[\big) &= \mathrm{Card}\left(f^{-1}(y) \cap \left(\bigcup_{j=0}^{\ell} [t_j, t_{j+1}[\right)\right) \\ &= \mathrm{Card}\left(\bigcup_{j=0}^{\ell} f^{-1}(y) \cap [t_j, t_{j+1}[\right) \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{\ell} \mathrm{Card}\big(f^{-1}(y) \cap [t_j, t_{j+1}[\big) \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{\ell} 1 \\ &= \ell + 1 \end{aligned}$$

On a $\psi_j(y) = 1 \Longleftrightarrow y \in [f(t_j, f(t_{j+1})[\Longleftrightarrow f^{-1}(y) \cap [t_j, t_{j+1}[\neq \emptyset$. Ainsi, on a

$$N(y) = \sum_{j=0}^{\ell} \psi_j(y)$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} V(f) &= \sum_{j=0}^{\ell} \int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} \psi_j(y)\mathrm{d}y \\ &\leqslant \int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} N(y)\mathrm{d}y \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty \max_{y\in\mathbb{R}} N(y) \end{aligned}$$

5 L'inégalité de Spijker

14. Soit $t \in [-\pi, \pi]$, on a

$$\begin{aligned} f_u(t) = y &\iff \mathrm{Re}\big(e^{-iu}F(e^{it})\big) = y \\ &\iff \frac{e^{-iu}F(e^{it}) + e^{iu}\overline{F(e^{it})}}{2} = y \\ &\iff \frac{e^{-iu}F(e^{it}) + e^{iu}\overline{F}(e^{-it})}{2} = y \end{aligned}$$

Ainsi, on écrit $\dfrac{e^{-iu}F(e^{it}) + e^{iu}\overline{F}(e^{-it})}{2} - y$ sous la forme $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ où $a_k \in \mathbb{C}$. Alors, $S(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k e^{-int} X^k \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ et il vérifie

$$S(e^{it}) = \frac{e^{-iu}F(e^{it}) + e^{iu}\overline{F}(e^{-it})}{2} - y = 0$$

Un élément $f^{-1}(y)\cap[-\pi,\pi[$ correspond exactement à un élément $t \in [-\pi, \pi[$ tel que $S(e^{it}) = 0$. L'application $t \in [-\pi, \pi[\longmapsto e^{it}$ est injective, donc le nombre de zéros de $t \in [-\pi, \pi[\longmapsto S(e^{it})$ est au plus le nombre de zéros de S. Il s'agit d'un polynôme de degré $2n$, il a donc au plus $2n$ racines :

$$\mathrm{Card}\big(f^{-1}(y) \cap [-\pi, \pi[\big) \leqslant 2n$$

15. On fait le changement de variables affine $v = u - \omega$ et on utilise la périodicité :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \big|\cos(u-\omega)\big|\mathrm{d}u &= \int_{-\pi-\omega}^{\pi-\omega} \big|\cos(v)\big|\mathrm{d}v \\ &= \int_{0}^{2\pi} \big|\cos(v)\big|\mathrm{d}v \\ &= 4 \end{aligned}$$

(Valeur moyenne d'un cosinus redressé ... bien sûr que vous connaissez les physiciens !).

On identifie les deux écritures $a\cos(u) + b\sin(u) = A\cos(u+\varphi)$, ce qui donne $\varphi =$ un truc et $A = \sqrt{a^2+b^2}$. De sorte que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big|a\cos(u) + b\sin(u)\big|\mathrm{d}u = \int_{-\pi}^{\pi} A|\cos(u+\varphi)|\mathrm{d}u = 4A = 4\sqrt{a^2+b^2}$$

Bien sûr, vaut mieux finir les calculs le jour des concours...

16. On a d'après 15.

$$\begin{aligned} \int_{t=-\pi}^{\pi} \left(\int_{u=-\pi}^{\pi} \big|f_u'(t)\big|\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t &= \int_{t=-\pi}^{\pi} \left(\int_{u=-\pi}^{\pi} \big|g'(t)\cos(u) + h'(t)\sin(u)\big|\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t \\ &= 4\int_{t=-\pi}^{\pi} \sqrt{g'^2(t) + h'^2(t)}\mathrm{d}t \\ &= 4\int_{-\pi}^{\pi} \big|f'(t)\big|\mathrm{d}t \\ &= 4V(f) \end{aligned}$$

17. On a d'après les résultats admis et 16. et 13.

$$\begin{aligned} V(f) &= \frac{1}{4}\int_{u=-\pi}^{\pi}\left(\int_{t=-\pi}^{\pi}\left|f_u'(t)\right|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\int_{u=-\pi}^{\pi} V(f_u)\mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{2\pi}{4}\times 2\max\left\{N(y;f_u), y\in\mathbb{R}\right\}\|f_u\|_\infty \\ &\leqslant \pi\times 2n\|f_u\|_\infty \end{aligned}$$

car $N(y;f_u)\leqslant 2n$ d'après ce qu'on a vu en 14.. Enfin, on rappelle que Pythagore donne $|\mathrm{Re}(z)|\leqslant|z|$, d'où :

$$\left|f_u(t)\right|\leqslant\left|\mathrm{Re}\big(e^{-iu}f(t)\big)\right|\leqslant\left|e^{-iu}f(t)\right|=|f(t)|$$

et donc, on a $\|f_u\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$. Ainsi, on a

$$V(f)\leqslant 2\pi n\|f\|_\infty$$

6 La version de Spijker du théorème matriciel de Kreiss

18. D'après 10., on note $F_r(z)=X^TR_{rz}(M)Y$. Les pôles de $R_{rz}(M)$ sont tous dans $\mathbb{D}_{\frac{1}{r}}$ par les propriétés de la résolvante.
Par définition de $b'(M)$, on a $\|R_z(M)\|_{\mathrm{op}}\leqslant\dfrac{1}{|z|-1}b'(M)$. En appliquant à F_r, on trouve

$$\left|F_r(z)\right|\leqslant\|R_{rz}(M)\|_{\mathrm{op}}\leqslant\frac{1}{r|z|-1}b'(M)$$

Enfin, la deuxième propriété est celle de la question 10..

19. On a par intégration par parties

$$\begin{aligned} X^TM^kY &= \frac{r^{k+1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_r(e^{it})e^{i(k+1)t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{r^{k+1}}{2\pi}\left(\left[\frac{F_r(e^{it})e^{i(k+1)t}}{k+1}\right]_{t=-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k+1}\int_{-\pi}^{\pi}F_r'(e^{it})e^{it}e^{i(k+1)t}\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{r^{k+1}}{2\pi}\times\frac{1}{k+1}\int_{-\pi}^{\pi}F_r'(e^{it})e^{it}e^{i(k+1)t}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Et donc, on a

$$\begin{aligned} \left|X^TM^kY\right| &\leqslant \frac{r^{k+1}}{2(k+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|F_r'(e^{it})\right|\mathrm{d}t \\ &= \frac{r^{k+1}}{2(k+1)\pi}V(F_r) \\ &\leqslant \frac{r^{k+1}}{k+1}n\|F_r\|_{\infty,\mathbb{S}^1} \\ &\leqslant \frac{r^{k+1}}{k+1}n\frac{b'(M)}{r-1} \end{aligned}$$

20. En prenant le sup sur $(X,Y)\in\Sigma_n\times\Sigma_n$ dans l'inégalité de $Q19.$, on trouve

$$\|M^k\|_{\mathrm{op}}\leqslant\frac{r^{k+1}}{(k+1)(r-1)}nb'(M)$$

L'inégalité précédente est valable pour tout $r>1$, on va donc minimiser la fonction $f:r\longmapsto\dfrac{r^{k+1}}{(k+1)(r-1)}$.
On calcule :

$$f'(r)=\frac{\big(k(r-1)-1\big)r^k}{(k+1)(r-1)^2}$$

Et donc, on en déduit que f' s'annule en $r = 1 + \dfrac{1}{k}$ et f prend son minimum en $1 + \dfrac{1}{k}$. On en déduit alors

$$\begin{aligned} \|M^k\|_{\text{op}} &\leqslant \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} \times \frac{1}{(k+1) \times \frac{1}{k}} nb'(M) \\ &= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k} nb'(M) \end{aligned}$$

Il est classique (par exemple par des études fonctions) que $\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k \leqslant e$. Ainsi, on a

$$\|M^k\|_{\text{op}} \leqslant enb'(M)$$

Et en prenant la borne supérieure sur $k \in \mathbb{N}$, on trouve

$$b(M) \leqslant enb'(M)$$

□