X-ENS Maths A 2022 (MP)

Pandou & Faf

26 avril 2022

1 Partie I : Déterminant de Gram

1. (a) L'ensemble $\{(a,a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1\}$ est une partie compacte de $V \times V'$ comme produit de deux compacts de V et de V' [1].
La fonction $(x,y) \in E^2 \longmapsto \langle x,y \rangle$ est une forme bilinéaire et E est de dimension finie, donc continue. Ainsi, cette fonction atteint son maximum sur le compact précédent :
$$\langle u_1, u_1' \rangle = \max\{\langle a,a' \rangle, (a,a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1\}$$
(b) On construit cette famille par récurrence.
   - $k=1$, on prend deux vecteurs u_1, u_1' donnés par $1.a$.
   - Supposons les familles $(u_1, ..., u_{k-1})$ et $(u_1', ..., u_{k-1}')$ construites. L'ensemble
$$\{(a,a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1, \forall i \leqslant k-1, \langle a, u_i \rangle = \langle a, u_i' \rangle = 0\}$$
est une partie fermée de $\{(a,a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1\}$, car $\langle u_i, \cdot \rangle$ est une application continue (donc son noyau est fermé), donc est encore compact.
L'application $(x,y) \in E^2 \longmapsto \langle x,y \rangle$ est toujours continue, ainsi cette fonction atteint son maximum sur le compact $\{(a,a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1, \forall i \leqslant k-1, \langle a, u_i \rangle = \langle a, u_i' \rangle = 0\}$. D'où le résultat.
2. Remarquons qu'on a immédiatement par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\forall (a,a') \in V \times V'$, $\|a\| = \|a'\| = 1$, $-1 \leqslant \langle a, a' \rangle \leqslant 1$.
   - Pour $k=1$, on prend $\widetilde{u} \in V \cap V'$ de norme 1 de sorte que $\langle u_1, u_1' \rangle = \langle \widetilde{u}, \widetilde{u} \rangle = 1$. Ainsi, on est dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et donc u_1 et u_1' sont positivement colinéaires et de même norme, donc égaux.
   - Ceci déclenche bien sûr une récurrence. Soit $k \in [\![1, \dim(V \cap V')]\!]$, on suppose que $u_\ell = u_\ell'$ pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant k$. Comme $\mathrm{rg}(u_1, ..., u_{k-1}) \leqslant k-1 < \dim(V \cap V')$, on en déduit qu'on peut trouver $\widetilde{u} \in V \cap V' \cap \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_{k-1})^\perp$ que l'on peut supposer unitaire quitte à renormaliser. Encore une fois, on a le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\langle u_k, u_k' \rangle = \langle \widetilde{u}, \widetilde{u} \rangle = 1$$
Donc, comme précédemment, $u_k = u_k'$.
3. (a) La famille u est déjà normée et de bon cardinal. On montre qu'elle est orthogonale. Mais par définition, on a $u_k \in V$ (car le sup est un max) et $\forall \ell \in [\![1, k-1]\!], \langle u_k, u_\ell \rangle = 0$.
(b) Comme u est une base, on en déduit en particulier que $\forall t, u_k + tu_\ell \neq 0$. En particulier, la fonction u_k est bien définie sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus $\mathcal{C}^1$ comme quotient défini de fonctions $\mathcal{C}^1$. De plus, comme (u_k, u_ℓ) est orthonormée, on a $\|u_k + tu_\ell\| = \sqrt{1+t^2}$.
On remarque que $\forall t \in \mathbb{R}, \left\|u_k(t)\right\| = 1$ et de plus si $r \leqslant k-1$, alors $\left\langle u_r, u_k(t) \right\rangle = 0$. Ainsi, comme $u_k(0) = u_k$, on a que $t \longmapsto \langle u_k(t), u_k' \rangle$ qui a un maximum en $t=0$. Ainsi, on a
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0} \langle u_k(t), u_k' \rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t}(0), u_k' \right\rangle = \langle u_\ell, u_k' \rangle = 0$$
(On est préservés du calcul complet de la dérivée ... Comme $u_k(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\big(u_k + tu_\ell\big) = u_k + tu_\ell + o(t)$).

1. La topologie n'étant pas au programme, il faut peut-être détailler un peu plus en considérant sur $V \times V'$ la norme $\|(a,a')\| = \max\left(\|a\|, \|a'\|\right)$.

(c) On rappelle que pour deux sous-espaces V et W, on a $(V+W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$. Ainsi, la question 3$a$. montre que $u_{k+1} \in \mathrm{Vect}(u_1,...,u_k)^\perp$ et la question 3b. montre que $u_{k+1} \in \mathrm{Vect}(u'_1,...,u'_k)^\perp$.

(d) Soit $k > \ell$. Par la question précédente, u_k est orthogonal à tous les u_ℓ et tous les u'_ℓ pour $\ell \leqslant k-1$. De même, u'_k est orthogonal à tous les u'_ℓ et tous les u_ℓ pour $\ell \leqslant k-1$. On en déduit que W_k et W'_k sont orthogonaux.

4. (a) On a déjà montré que $0 \leqslant \langle u_k, u_k\rangle \leqslant 1$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet, rappelons que $\langle u_k, u'_k\rangle \geqslant 0$ (car si $\langle a, a'\rangle \leqslant 0$, alors $\langle -a, a'\rangle \geqslant 0$). Donc, il existe $\theta_k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que

$$\langle u_k, u'_k\rangle = \cos(\theta_k)$$

(b) Comme $u_k \perp u'_\ell$, la matrice de Gram $\mathrm{Gram}(u,u')$ est une matrice diagonale et on a

$$\det\big(\mathrm{Gram}(u,u')\big) = \prod_{k=1}^{p} \langle u_k, u'_k\rangle = \prod_{k=1}^{p} \cos(\theta_k)$$

(c) Comme $\cos \leqslant 1$, on a bien

$$\det\big(\mathrm{Gram}(u,u')\big) \leqslant 1$$

On a égalité si, et seulement si, $\forall k, \theta_k = 0$, autrement dit $u_k = u'_k$. Ainsi, on a $V = V'$.

2 Partie II : Formes volumes

5. (a) On vérifie que le déterminant est bien alterné ... Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$\begin{aligned}
\big[x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(p)}\big] &= \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma'\circ\sigma(i),i} \\
&= \prod_{\sigma''=\sigma'\circ\sigma} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma'') \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma''(i),i} \\
&= \varepsilon(\sigma)[x_1,...,x_p]
\end{aligned}$$

(b) g est clairement p-linéaire par la linéarité de f. De plus, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\begin{aligned}
g(u\cdot\sigma) &= \big[f(u_{\sigma(1)}),...,f(u_{\sigma(p)})\big] \\
&= \varepsilon(\sigma)\big[f(u_1),...,f(u_p)\big] \\
&= \varepsilon(\sigma)g(u)
\end{aligned}$$

6. (a) Soit $e \in E^p$. Alors, on remarque que

$$\Omega_p(e)(u) = \big[f(u_1),...,f(u_p)\big] \qquad \text{avec} \qquad f : (u_1,...,u_p) \in E \longmapsto \big(\langle e_1, u_1\rangle,...,\langle e_p, u_p\rangle\big) \in \mathbb{R}^p$$

Et donc, par la question précédente, on a bien $\Omega_p(e) \in \mathcal{A}_p(E,\mathbb{R})$.

(b) La matrice de Gram est une matrice symétrique par symétrie du produit scalaire. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\Omega(e)(u) &= \det\big(\mathrm{Gram}(e,u)\big) \\
&= \det\big(\mathrm{Gram}(u,e)\big) \\
&= \Omega(u)(e)
\end{aligned}$$

(c) Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\begin{aligned}
\Omega(e\cdot\sigma)(u) &= \Omega_p(u)(e\cdot\sigma) && \text{par la question précédente} \\
&= \varepsilon(\sigma)\Omega_p(u)(e) && \text{car } \Omega_p(u) \text{ est alterné} \\
&= \varepsilon(\sigma)\Omega_p(e)(u) && \text{encore par la question précédente}
\end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout u, on a

$$\Omega(e\cdot\sigma) = \varepsilon(\sigma)\Omega_p(e)$$

Et comme $e \longmapsto \Omega_p(e)$ est multilinéaire (car $\Omega_p(e)(u) = \Omega_p(u)(e)$). On en déduit que

$$\Omega_p \in \mathcal{A}\big(E, \mathcal{A}_p(E,\mathbb{R})\big)$$

7. (a) C'est un résultat de multilinéarité alterné ...

$$\Omega_p(e') = \sum_{1 \leqslant j_1,\dots,j_p \leqslant p} \prod_{i=1}^{p} M_{i,j_i} \Omega_p(e_{j_1},\dots,e_{j_p})$$

Si on a $j_k = j_\ell$, alors par le caractère alterné de Ω_p, on a $\Omega_p(e_{j_1},\dots,e_{j_p}) = 0$. La somme est donc indexée sur $(j_1,\dots,j_k)$ tous différents qui réalise donc une permutation de $[\![1,p]\!]$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \Omega_p(e') &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{p} M_{i,\sigma(i)} \Omega_p(e\cdot\sigma) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\Omega_p(e) \prod_{i=1}^{p} M_{i,\sigma(i)} \\ &= \det(M)\Omega_p(e) \end{aligned}$$

(b) Si e est une famille liée, alors on peut écrire disons $e_1 = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i e_i$, alors par linéarité :

$$\Omega_p(e) = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i \Omega_p(e_i, e_2, \dots, e_p) = 0$$

e_i vaut l'un des $e_2,\dots,e_p$.
Si e est libre, alors e est la base de l'espace qu'il engendre, notons V cet espace. On considère e' une base orthonormée de V (par exemple obtenue par orthonormalisation de Schmidt, mais ce n'est pas obligatoire!). On en déduit qu'on a une matrice $M \in GL_p(\mathbb{R})$ tel que

$$\Omega_p(e') = \det(M)\Omega_p(e)$$

Mais comme e' est orthonormée, la matrice de Gram est l'identité et donc $\Omega_p(e')(e') = 1$, en particulier, $\Omega_p(e') \neq 0$. Donc,

$$\Omega_p(e) \neq 0$$

(c) Si e est liée, c'est immédiat.
Sinon, e est la base de l'espace V qu'il engendre et on reprend e' une base orthonormée de V de sorte qu'on ait de nouveau $M \in GL_p(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{aligned} \Omega_p(e)(e) &= \det(M)\Omega_p(b)(e) \\ &= \det(M)\Omega_p(e)(b) \\ &= \det(M)^2\Omega_p(b)(b) \\ &= \det(M)^2 > 0 \end{aligned}$$

8. (a) Si b est orthonormée, sa matrice de Gram est l'identité et donc $\mathrm{vol}_p(b) = 1$.

(b) On écrit $e_1 = \mathrm{pr}(e_1) + \widetilde{e}_1$ tel que $\widetilde{e}_1 \in \mathrm{Vect}(e_2^p)$. Ainsi, on a

$$\Omega_p(e) = \Omega_p\big(\mathrm{pr}(e_1), e_2^p\big) + \underbrace{\Omega_p\big(\widetilde{e}_1, e_2^p\big)}_{=0}$$

Comme $\mathrm{pr}(e_1) \in \mathrm{Vect}(e_2^p)^\perp$, ainsi, la matrice de Gram de $\big(\mathrm{pr}(e_1), e_2^p\big)$ est diagonale par blocs :

$$\mathrm{Gram}\big(\mathrm{pr}(e_1), e_2^p\big) = \begin{pmatrix} \|\mathrm{pr}(e_1)\|^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{Gram}(e_2^p, e_2^p) \end{pmatrix}$$

Ainsi, on en déduit que

$$\mathrm{vol}_p(e) = \|\mathrm{pr}(e_1)\| \mathrm{vol}_{p-1}(e_2^p)$$

(c) Par la question précédente, si on note pr_k la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(e_{k+1},\dots,e_p)$. Ainsi, par récurrence, on a

$$\mathrm{vol}_p(e) = \prod_{i=1}^{p} \|\mathrm{pr}_i(e_i)\| \leqslant \prod_{i=1}^{p} \|e_i\|$$

car $\|\mathrm{pr}_i(e_i)\| \leqslant \|e_i\|$ et on a égalité si, et seulement si, $\forall i, \mathrm{pr}_i(e_i) = e_i$. Ce qui se produit si, et seulement si, $(e_1,\dots,e_p)$ sont deux à deux orthogonaux.

9. (a) On a d'après 7a.,
$$\Omega_p(e)(e) = \det(P_b^e)^2\Omega_p(b)(b) = \det(P_b^e)^2$$
car $\Omega_p(b)(b) = 1$ (car la matrice de Gram est l'identité). On en déduit alors que
$$\mathrm{vol}_p(e) = \sqrt{\Omega_p(e)(e)} = |\det(P_b^e)|$$
(b) Soit $b \in E^p$ une base orthonormée, si e et e' sont libres, alors on a par 7a. et la question précédente
$$\begin{aligned}\left|\Omega_p(e)(e')\right| &= \left|\det(P_b^e)\right|\left|P_b^{e'}\right| \\ &= \mathrm{vol}_p(e)\mathrm{vol}_p(e')\end{aligned}$$
Si l'une des famille e ou e' est liée, alors on a $\Omega_p(e)(e') = \Omega_p(e')(e) = 0$. D'où dans tous les cas
$$\left|\Omega_p(e)(e')\right| \leqslant \mathrm{vol}_p(e)\mathrm{vol}_p(e')$$

3 Partie III : Structure euclidienne sur $\mathcal{A}_p(E,\mathbb{R})$

10. (a) Soit $u = (u_1, ..., u_p) \in E^p$, on écrit $u = Ae$ avec $A \in M_{p,d}(\mathbb{R})$, on a alors
$$\omega(u) = \sum_{1\leqslant j_1,\dots,j_p\leqslant d}\prod_{i=1}^{p} A_{i,j_i}\omega(e_{j_1}, ..., e_{j_p})$$
Si on a $j_k = j_\ell$, alors comme ω est alterné, on a $\omega(e_{j_1}, ..., e_{j_p}) = 0$. On en déduit que
$$\begin{aligned}\omega(u) &= \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_p}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\omega(e_\alpha\cdot\sigma)\prod_{i=1}^{p}A_{i,\alpha_{\sigma(i)}} \\ &= \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_p}\omega(e_\alpha)\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{p}A_{i,\alpha_{\sigma(i)}}\end{aligned}$$
On fixe $\beta \in \mathcal{I}_p$ et on fait $\omega = \Omega_p(e_\beta)$ de sorte que $\Omega_p(e_\beta)(e_\alpha) = \delta_{\alpha,\beta}$ car si $\alpha \neq \beta$ alors la matrice de Gram associée a une colonne nulle (par orthogonalité). On en déduit donc que
$$\Omega_p(e_\beta)(u) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{p}A_{i,\beta_{\sigma(i)}}$$
Et donc, on en déduit que
$$\omega = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_p}\omega(e_\alpha)\Omega_p(e_\alpha)$$
(b) Il est clair que $(\omega,\omega') \longmapsto \langle\omega,\omega'\rangle$ est symétrique bilinéaire. De plus, on a
$$\langle\omega,\omega\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_p}\omega(e_\alpha)^2 \geqslant 0$$
qui est nul si, et seulement si, $\forall\alpha \in \mathcal{I}_p, \omega(e_\alpha) = 0$ et donc $\omega = 0$ d'après la question précédente. Donc, $(\omega,\omega') \longmapsto \langle\omega,\omega'\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{A}_p(E,\mathbb{R})$.

Soit $\alpha, \beta \in \mathcal{I}_p$, alors
$$\begin{aligned}\left\langle\Omega_p(e_\alpha),\Omega_p(e_\beta)\right\rangle &= \sum_{\gamma\in\mathcal{I}_p}\Omega_p(e_\alpha)(e_\gamma)\Omega_p(e_\beta)(e_\gamma) \\ &= \sum_{\gamma\in\mathcal{I}_p}\delta_{\alpha,\gamma}\delta_{\beta,\gamma} \\ &= \delta_{\alpha,\beta}\end{aligned}$$
Donc, $\left(\Omega_p(e_\alpha)\right)_{\alpha\in\mathcal{I}_p}$ est libre (car orthonormée) et génératrice d'après 10.a. Ainsi, on a
$$\dim\left(\mathcal{A}_p(E,\mathbb{R})\right) = \mathrm{Card}(\mathcal{I}_p) = \binom{p}{d}$$

(c) Soit $\alpha \in \mathcal{I}_{d-1}$, on note $\widehat{\alpha} = [\![1,d]\!] \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_{d-1}\}$. On considère l'application linéaire φ qui envoie $\Omega_{d-1}(e_\alpha)$ sur $e_{\widehat{\alpha}}$ de sorte que φ est bien une isométrie entre $\mathcal{A}_{d-1}(E,\mathbb{R})$ et E, car φ envoie une base orthonormée sur une base orthonormée.

11. On calcule grâce à 10.*a.* :

$$\begin{aligned}\Omega_p(u)(v) &= \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_p} \Omega_p(u)(e_\alpha)\Omega_p(e_\alpha)(v)\\ &= \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_p} \Omega_p(u)(e_\alpha)\Omega_p(v)(e_\alpha)\\ &= \big\langle \Omega_p(u), \Omega_p(v)\big\rangle\end{aligned}$$

12. Soit e une base orthonormée, on a

$$\big\langle \Omega_p(e_\alpha), \Omega_p(e_\beta)\big\rangle = \Omega_p(e_\alpha)(e_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$$

On en déduit que

$$\omega(e_\alpha) = \big\langle \Omega_p(e_\alpha), \omega\big\rangle$$

Et donc, on a

$$\langle \omega, \omega'\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_p} \big\langle \omega, \Omega_p(e_\alpha)\big\rangle\big\langle \omega', \Omega_p(e_\alpha)\big\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha)\omega'(e_\alpha)$$

Si e' est une autre base orthonormée de E, alors la matrice de passage de e à e' est une matrice orthogonale (pour le produit scalaire de E). En particulier, cette matrice est de déterminant 1 et donc on a $\omega(e'_\alpha) = \omega(e_\alpha)$. Idem pour ω'.
Ainsi, $\langle \omega, \omega'\rangle$ ne dépend pas de la base orthonormée.

4 Partie IV : Grassmaniennes orientées

13. (a) On note $V = \mathrm{Vect}(e)$ et $V' = \mathrm{Vect}(e')$. Si $V = V'$, alors on a

$$\Omega_p(e') = \det(P_e^{e'})\Omega_p(e)$$

Et donc, $\Omega_p(e)$ et $\Omega_p(e')$ sont colinéaires.

Réciproquement, si $\Omega_p(e) = \lambda\Omega_p(e')$. Soit u et u' les familles de la question 1*b.* qui sont des bases orthonormées de V et V'. On a

$$\begin{aligned}\Omega_p(u)(u') &= \det(P_e^u)\Omega_p(e)(u')\\ &= \lambda \det(P_e^u)\det(P_{u'}^{e'})\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}\Omega_p(u')(u) &= \det(P_{e'}^{u'})\Omega_p(e')(u)\\ &= \frac{1}{\lambda}\det(P_{e'}^{u'})\Omega_p(e,u)\\ &= \frac{1}{\lambda}\det(P_{e'}^{u'})\Omega_p(u,e)\\ &= \big(\lambda\det(P_{u'}^{e'})\det(P_e^u)\big)^{-1}\\ &= \Omega_p(u')(u)^{-1}\\ &= \Omega_p(u)(u')^{-1}\end{aligned}$$

Donc,

$$\Omega_p(u)(u') = \pm 1$$

Donc, par 4*c.*, on a $V = V'$.

(b) Soit (V, C) un sous-espace orienté. Soit $e \in C$, alors l'orthonormalisation de Schmidt donne une base orthonormée directe b de V (ie avec la même orientation que e). En effet, la matrice de passage de e à la base orthonormalisée est triangulaire supérieure, dont la diagonale est positive. On a

$$\mathrm{vol}_p(e) = \det(P_b^e)$$

Donc,

$$\Omega_p(e) = \det(P_b^e)\Omega_p(b) = \mathrm{vol}_p(e) \underbrace{\Omega_p(b)}_{:=\Psi(V,C)\in\mathcal{A}_p(E,\mathbb{R})}$$

En prenant $e = b$, on trouve $\Omega_p(b) = \Psi(V, C)$ nécessairement dans l'égalité précédente.

14. (a) Soit b une base orthonormée directe tel que $\Psi(V, C) = \Omega_p(b)$. On complète b en une base orthonormée e de E. On rappelle que la famille $\big(\Omega_p(b_\alpha)\big)_{\alpha\in\mathcal{I}_p}$ est orthonormée, en particulier, $\Omega_p(b)$ est unitaire dans $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.

On suppose que $\Psi(V, C) = \Psi(V', C')$. On considère des bases e et e' de V et V'. De sorte que

$$\Omega_p(e) = \mathrm{vol}_p(e)\Psi(V, C) = \mathrm{vol}_p(e)\mathrm{vol}_p(e')^{-1}\Omega_p(e')$$

Ainsi, $\Omega_p(e)$ et $\Omega_p(e')$ sont colinéaires et par $13a$., on a $V = V'$.
On considère $e \in C$ et $e' \in C'$ orthonormées. On a alors

$$\Psi(V, C) = \Omega_p(e) = \Psi(V, C') = \Omega_p(e') = \det(P_e^{e'})\Omega_p(e')$$

Et comme $\Omega_p(e') \neq 0$, on en déduit que $\det(P_e^{e'}) = 1 > 0$, donc $C = C'$.

(b) On montre que $\Psi\big(\widetilde{\mathrm{Gr}}(p, E)\big)$ est fermée (car $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ est de dimension finie).
On considère une suite (V_n, C_n) de sous-espaces orientés tels que $\Psi(V_n, C_n) = \omega_n \longrightarrow \omega$ dans $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$. Si $e^{(n)}$ une base orthonormée directe de (V_n, C_n), alors $\omega_n = \Omega_p(e^{(n)})$. On écrit $e^{(n)} = \big(e_1^{(n)}, ..., e_p^{(n)}\big)$ où chaque $e_i^{(n)}$ est unitaire. Quitte à extraire, on suppose que $\big(e_i^{(n)}\big)_{1\leqslant i\leqslant p}$ converge vers $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ dans E^p. Par continuité du produit scalaire, $(e_1, ..., e_p)$ est toujours orthonormée et on considère $V = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$ et C l'orientation de $(e_1, ..., e_p)$ et on a

$$\Omega_p(e) = \Psi(V, C)$$

Comme $\Omega_p : E^p \longmapsto \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ est continu, on en déduit que

$$\Psi(V_n, C_n) = \Omega_p(e^n) \longrightarrow \Omega_p(e) = \Psi(V, C)$$

Donc, $\Psi\big(\widetilde{\mathrm{Gr}}(p, E)\big)$ est un fermé de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.

15. On suppose que $p \leqslant d - 1$. Soit V, V' deux sous -espaces de dimension p. Soit u et u' les deux familles associées à V et V' de $1b$.. On rappelle alors que $W_k = \mathrm{Vect}(u_k, u_k')$ sont deux à deux orthogonaux. On note $e_k(t) = tu_k' + (1-t)u_k \in W_k \setminus \{0\}$. On pose $f_k(t) = \dfrac{e_k(t)}{\|e_k(t)\|}$ puis, $V_t = \mathrm{Vect}\big(f_1(t), ..., f_p(t)\big)$ et C_t l'orientation associée. La famille $\big(f_k(t)\big)$ est une base orthonormée directe de (V_t, C_t) de sorte que

$$\Psi(V_t, C_t) = \Omega_p\big(f(t)\big)$$

Alors $t \longmapsto \Psi(V_t, C_t) = \Omega_p\big(f(t)\big)$ est un chemin qui relie $\Psi(V, C)$ à $\Psi(V', C')$. On a relié V à V' sans tenir compte de l'orientation.

Maintenant qu'on a relié $\Psi(V', C')$ à $\Psi(V, C)$. On fixe V un sous-espace de dimension p et C et C' deux orientations de V, on montre qu'on peut relier $\Psi(V, C)$ à $\Psi(V, C')$.
Comme $p \leqslant d - 1$, on va pouvoir "tourner en dehors de V" (ce qui ne se verra pas sous l'action de Ψ). Soit $f \in V^\perp$ normé (qui existe car $p \leqslant d - 1$. On note $e(t) = \big(te_1 + (1-t)f, e_2, ..., e_n\big)$ est continue et ne s'annule pas. On a donc une fonction continue $\gamma(t) = \dfrac{e(t)}{\|\gamma(t)\|}$ unitaire. On a donc un chemin entre $\Psi(V, C)$ et $\Psi(V', c)$ avec $V' = \mathrm{Vect}(f, e_2, ..., e_n)$ et c l'orientation de $(f, e_2, ..., e_p)$.
De même, on a un chemin entre $\Psi(V, C')$ et $\Psi(V', c)$. On en déduit donc un chemin entre $\Psi(V, C)$ et $\Psi(V, C')$.

Réciproquement, si $p = d$. Alors, on a deux orientations C et C' de E et alors $\Psi\big(\widetilde{\mathrm{Gr}}(d, E)\big) = \{\omega = \Psi(E, C), \omega' = \Psi(E, C')\}$ qui n'est pas connexe par arcs (Il suffit d'adapter une preuve du théorème des valeurs intermédiaires si on en n'est pas convaincu).