EXERCICE

M. Toutlemonde habite dans un immeuble dont la porte d'entrée est sécurisée par un code à 4 chiffres dont chacun est compris entre 0 et 9. Malheureusement, il se trouve devant cette porte et il en a oublié le code.

Q1. Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ puis en déduire son espérance.

Q2. En essayant un code au hasard, quelle est la probabilité de tomber sur le bon code ?

Q3. M. Toutlemonde décide de trouver le bon code en procédant de la manière suivante : il essaye un code au hasard choisi par les codes non encore testés. On note X la variable aléatoire égale au nombre de codes testés jusqu'à obtenir le bon code.
Déterminer la loi de X et donner son espérance.

Q4. À la place de la stratégie précédente, M. Toutlemonde essaye des codes au hasard, sans se soucier du fait qu'il les ait déjà essayés ou non. On note encore X la variable aléatoire égale au nombre de codes testés jusqu'à obtenir le bon code.
Déterminer la loi de X et donner son espérance.

Q5. *Informatique Pour Tous.*
Compléter, en langage Python, le script suivant pour qu'il simule une personne essayant de deviner le code 4714 :

```
code=4714
n=int(input('Taper un code à 4 chiffres : '))
k= ..................
while ..................
        ..................
        ..................
print('Vous avez trouvé le code en '+str(k)+' essais.')
```

(.................. représente une instruction ou une partie d'instruction à compléter.)

Pour ne plus oublier le code, M. Toutlemonde décide de l'écrire sur un papier qu'il garde dans sa poche. Pour ne pas se faire dérober le code il le crypte de la manière suivante : il remplace chacun des 4 chiffres par lui-même additionné de 5 et réduit modulo 10. Par exemple, le code 4714 est crypté 9269.

Q6. *Informatique Pour Tous.*
Écrire, en langage Python, une fonction `crypte(m)` qui reçoit en entrée une liste m de 4 chiffres et renvoie en sortie la version cryptée de cette liste. Par exemple, `crypte([4,7,1,4])` renvoie `[9,2,6,9]`.

PROBLÈME - Intégrales de Fresnel

Dans ce problème, on étudie certaines intégrales et séries numériques reliées aux intégrales dites de Fresnel. Augustin Fresnel (1788-1827) démontra le caractère ondulatoire de la lumière et, pour cette raison, il est considéré comme un des fondateurs de l'optique moderne.

Partie I - Intégrales fonctions de leur borne

Dans cette partie, on définit la fonction H par l'expression $H(x)=\int_0^x e^{it^2}dt$, où e^{it^2} signifie $\exp(it^2)$.

Q7. Démontrer que H est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $H'(x)$.

Q8. Étudier la parité de la fonction H.

Q9. Démontrer que la fonction $t \mapsto e^{it^2}$ est développable en série entière au voisinage de 0. En déduire un développement en série entière de la fonction H au voisinage de 0, en précisant l'intervalle sur lequel ce développement est valable.

Q10. Si $x>0$, démontrer que :

$$H(x)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}du.$$

Q11. Pour $x>4\pi^2$, en déduire que :

$$H(x)-H(\sqrt{2\pi})=-i\frac{e^{ix^2}}{2x}+\frac{i}{2\sqrt{2\pi}}-\frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2}\frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}du.$$

Q12. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{it^2}dt$ converge.

Q13. *Informatique Pour Tous.*
Proposer, en langage Python, une fonction `I(f,a,b,n)` qui prend en entrée une fonction f à valeurs réelles ou complexes, deux réels a et b et un entier naturel n et qui renvoie une valeur approchée avec la méthode des rectangles de $\int_a^b f(t)dt$ calculée avec n rectangles.

Q14. *Informatique Pour Tous.*
Proposer, en langage Python, une fonction `H(x,n)` qui prend en entrée un réel x et un entier naturel n et qui renvoie une valeur approchée de $H(x)$ calculée avec la fonction de la question précédente. On rappelle que le code Python, pour e^{it^2}, est `exp(1j*t**2)`.

Partie II - Calcul des intégrales de Fresnel

Dans cette partie, on étudie la fonction g d'expression :

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\,dt.$$

Pour cela, on pose $f(x,t)=\dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$.

✓ **Q15.** Si $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, déterminer les modules des nombres complexes $e^{-x^2(t^2-i)}$ et t^2-i.

~ ✓ **Q16.** Démontrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser un argument de parité).

✓ **Q17.** Soit $(x_n)_n$ une suite divergente vers $+\infty$. À l'aide du théorème de convergence dominée, démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n)=0$. En déduire la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

✓ **Q18.** Démontrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

✓ **Q19.** On admet dans cette question que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge et est égale à $\sqrt{\pi}$.

Vérifier que :

$$\forall x>0,\quad g'(x)=-2\sqrt{\pi}e^{ix^2}.$$

✓ **Q20.** Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^2-i}$.

On admet ensuite que :

$$\frac{1}{X^2-i}=\frac{1-i}{4}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-X\sqrt{2}+1}+\frac{i}{X^2-X\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2X+\sqrt{2}}{X^2+X\sqrt{2}+1}+\frac{i}{X^2+X\sqrt{2}+1}\right).$$

Démontrer que $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt=\pi\sqrt{2}$. Donner la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt$ puis déterminer la valeur de $g(0)$.

✓ **Q21.** En déduire que :

$$\forall x>0,\quad g(x)=\frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}}-2\sqrt{\pi}\times H(x)$$

où la fonction H a été introduite dans la partie I.

Donner ensuite les valeurs de $\int_0^{+\infty} e^{it^2}dt$, de $\int_0^{+\infty}\cos(t^2)dt$ et de $\int_0^{+\infty}\sin(t^2)dt$.

Partie III - Étude d'une série de fonctions

Dans cette partie, on étudie la fonction S d'expression :

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction d'expression $f_n(x)=\frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$.

Q22. On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle positive décroissante de limite nulle et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. En admettant l'identité suivante :

$$\forall N\in\mathbb{N}^*,\quad \sum_{n=1}^{N}a_n(b_n-b_{n-1})=\sum_{n=1}^{N}(a_n-a_{n+1})b_n+a_{N+1}b_N-a_1b_0\ ,$$

démontrer que la série $\sum a_n(b_n-b_{n-1})$ converge.

Q23. Soient $x\in\,]0,2\pi[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}=e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\times\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Q24. À l'aide des deux questions précédentes, démontrer que S est définie sur $]0,2\pi[$.

Q25. On admet dans cette question que si $k\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\,]0,2\pi[$:

$$\left|\frac{e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{ix\sqrt{k}}-\int_k^{k+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,dt\right|\leq\frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}.$$

Démontrer qu'il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $x\in\,]0,2\pi[$:

$$\left|\frac{e^{ix}-1}{ix}S(x)-\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,dt\right|\leq C.$$

Q26. Déterminer la limite, quand x tend vers 0^+, de :

$$I(x)=\sqrt{x}\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Q27. Déterminer la limite en 0^+ de la fonction $x\mapsto\frac{e^{ix}-1}{ix}$. Donner alors un équivalent de $S($

quand x tend vers 0^+.

FIN