EXERCICE 1

Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes

Présentation générale

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q,R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad \big(R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V)\big).$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V.

Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A,B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n+1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.

Par exemple, si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B, on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X,$$

donc on a $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

Partie I - Généralités sur l'application φ

Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q1. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2.$$

Q2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse. En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie II - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1.$$

Q3. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Q4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M.

Q5. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ.

Partie III - Étude d'un second exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

Q6. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Q7. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est constant.

Partie IV - Étude du cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.

On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \ldots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \ldots, x_n$ par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in [\![0, n]\!]^2, \quad L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = k \\ 0 & \text{si} \quad j \neq k. \end{cases}$$

IV.1 - Décomposition avec les polynômes de Lagrange

Q8. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \ldots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.

Q9. Déduire de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.

Q10. Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

IV.2 - Réduction de l'endomorphisme φ

Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B.

Q11. Soit $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.

Q12. En utilisant **Q9**, en déduire pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ que $\varphi(L_k) = A(x_k) L_k$.

Q13. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

EXERCICE 2

Étude de séries de pile ou de face

Présentation générale

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $1/2$ et face avec la probabilité $1/2$). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'évènement [le k-ième lancer de la pièce donne pile] et par F_k l'évènement [le k-ième lancer de la pièce donne face].

On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n°1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n°2 commence au lancer suivant la fin la série n°1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

Exemple 1 : $$\underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n°1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n°2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n°3}} \cap F_8 \cap \cdots.$$

Exemple 2 : $$\underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n°1}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n°2}} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k\right)}_{\text{Série n°3}}.$$

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

- si la série n°1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;
- sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n°1.

Ainsi, si l'évènement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'événement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série entière

Q14. Rappeler (sans le démontrer) le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum_{k\geqslant 0} x^k.$$

Q15. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{k\geqslant 0} kx^k$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

Q16. Exprimer l'évènement $(L_1 = k)$ en fonction des évènements P_i et F_i pour $i \in [\![1, k+1]\!]$.

Q17. Montrer que $P(L_1 = k) = 2^{-k}$.

Q18. En déduire la valeur de $P(L_1 = 0)$.

Q19. Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice ?

Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'évènement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1\,, \quad N_3 = 2\,, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4\,.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Généralités

Q20. Déterminer les lois de N_1 et N_2.

Q21. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

II.2 - Relation de récurrence pour la loi N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n.

Q22. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Justifier que l'on a l'égalité d'évènements :

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\,,$$

puis en déduire que :

$$P\Big((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\Big) = \frac{1}{2} P\Big((N_n = k) \cap P_n\Big).$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ les relations :

$$P\Big((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}\Big) = \frac{1}{2} P\Big((N_n = k) \cap F_n\Big),$$

$$P\Big((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}\Big) = \frac{1}{2} P\Big((N_n = k-1) \cap P_n\Big),$$

$$P\Big((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}\Big) = \frac{1}{2} P\Big((N_n = k-1) \cap F_n\Big).$$

Q23. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ la relation :

$$P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2} P(N_n = k) + \frac{1}{2} P(N_n = k-1)\,.$$

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m, dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_m(x) = \sum_{k=1}^{m} P(N_m = k)x^k .$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_1(x) = x .$$

Q24. Déduire de **Q23** que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x) .$$

Q25. Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Q26. Rappeler l'expression de l'espérance de N_n en fonction de sa fonction génératrice G_n. En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n.

Q27. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n.

EXERCICE 3
La constante d'Euler

Présentation générale

Dans cet exercice, on commence dans la première partie par démontrer la convergence d'une suite afin de définir la constante d'Euler comme sa limite. Dans la seconde partie, on détermine une expression de cette constante sous la forme d'une intégrale.

Partie I - Construction de la constante d'Euler

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n).$$

et on considère la suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 2}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \Delta_n = u_n - u_{n-1}.$$

Q28. Déterminer un nombre $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{a}{n^2}$.

Q29. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \Delta_n$ est convergente.

Q30. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie II - Expression intégrale de la constante d'Euler

Dans **Q30**, on a montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un un nombre réel que l'on note γ dans la suite de l'exercice. Ce dernier est appelé constante d'Euler. Dans cette partie, on détermine une expression de γ sous la forme d'une intégrale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si} \quad t < n \\ 0 & \text{si} \quad t \geqslant n. \end{cases}$$

II.1 - Propriétés de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Dans cette sous-partie, on pourra utiliser librement l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ valable pour tout $x \in]-1,+\infty[$.

Q31. Soit $t \in]0,+\infty[$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \geqslant n_0$, on a :

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t).$$

Q32. Déduire de la question précédente que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Q33. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $t \in]0,+\infty[$, on a $|f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}|\ln(t)|$.

Q34. Montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

II.2 - Convergence d'une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 u^n \ln(1-u)\,\mathrm{d}u.$$

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Q35. Montrer que l'intégrale I_n est convergente.

Q36. Déduire des résultats de la sous-partie **II.1** que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q37. Montrer que l'intégrale J_n est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u$$

est convergente. En déduire que l'intégrale J_n est convergente et que l'on a les égalités :

$$J_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

Q38. Montrer que l'on a la relation :

$$I_n = \frac{n}{n+1}\ln(n) + nJ_n.$$

Q39. Déduire des questions précédentes que :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 22 1169 – D'après documents fournis