PROBLÈME 1

Intégrales de Gauss et théorème de Moivre-Laplace

Présentation

Le théorème de Moivre-Laplace permet d'approcher les calculs de probabilité pour une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$ par des calculs d'intégrales de fonctions gaussiennes. Une première démonstration a été donnée en 1733 par Abraham de Moivre pour le cas où $p = \frac{1}{2}$.

La **partie I** permet d'obtenir un résultat de convergence. La **partie II** aboutit à un calcul exact d'une intégrale de fonction gaussienne dite " intégrale de Gauss ". La **partie III** permet d'établir une majoration utile à la **partie IV** qui s'intéresse à la convergence simple d'une suite de fonctions vers une fonction gaussienne. Ce résultat de convergence constitue une étape clé dans une démonstration possible du théorème de Moivre-Laplace.

Partie I - Convergence d'une suite

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on pose :

$$a_{k,n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\binom{2n}{k}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_m = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Q1. Montrer que la suite $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Q2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m.$$

Q3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}} \qquad \text{et} \qquad I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n}.$$

Q4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}.$$

En déduire que :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2n}} \leq 2\pi (a_{n,n})^2 \leq 1.$$

Q5. En déduire la convergence de la suite $(a_{n,n})_{n\geq 1}$ lorsque n tend vers l'infini, puis que :

$$I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,.$$

Partie II - Calcul d'une intégrale de Gauss

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose :

$$u_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq t \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\,.$$

Enfin, on considère l'intégrale de Gauss :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}t\,.$$

Q6. À l'aide d'un changement de variable simple, déduire de la **Q5** que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

Q7. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et donner sa limite.

Q8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + x \leq e^x$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq u_n(t) \leq e^{-t^2}\,.$$

Q9. Montrer que l'intégrale K est convergente, puis déduire des questions précédentes une valeur exacte de K.

Partie III - Calcul d'une majoration

Q10. Montrer qu'il existe une fonction $g : \left[0\,;\,\frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ et un réel $M \geq 0$, tels que :

$$\forall x \in \left[0\,;\,\frac{1}{2}\right],\quad \frac{1-x}{1+x} = e^{-2x+g(x)} \quad \text{et} \quad |g(x)| \leq Mx^3.$$

Indication : pour obtenir la majoration, on pourra écrire $g(x)$ sous forme d'intégrale.

Q11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in [\![n+1; 2n]\!]$:

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{\prod_{i=1}^{k-n-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right)}{\prod_{i=1}^{k-n-1}\left(1 + \frac{i}{n}\right)} \times \frac{n}{k}\,.$$

Q12. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 \leq k \leq \dfrac{3n}{2} + 1$, il existe $b_{k,n} \in \mathbb{R}$ tel que

$|b_{k,n}| \leq \dfrac{M}{n^3}(k - n - 1)^4$ et :

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{n}{k} \times e^{b_{k,n}} \times e^{-\frac{1}{n}(k-n-1)(k-n)}.$$

Partie IV - Vers le théorème de Moivre-Laplace

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(2n, \dfrac{1}{2}\right)$ et on pose :

$$Z_n = \frac{2X_n - 2n}{\sqrt{2n}}.$$

Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on pose $t_{k,n} = \dfrac{2k - 2n}{\sqrt{2n}}$ et $J_{k,n} = \left[t_{k,n} - \dfrac{1}{\sqrt{2n}}, t_{k,n} + \dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right[$. On admet que les intervalles $J_{k,n}$, pour $k \in [\![0, 2n]\!]$, sont disjoints deux à deux et que :

$$\left[-\sqrt{2n} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\ ;\ \sqrt{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right[= \bigcup_{k=0}^{2n} J_{k,n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une fonction $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en escalier de la manière suivante :

$$h_n : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2n}}{2}\mathrm{P}(X_n = k) & \text{s'il existe } k \in [\![0; 2n]\!] \text{ tel que } t \in J_{k,n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Q13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z_n.

Q14. Proposer une représentation graphique de la fonction h_2.

Q15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que la fonction h_n possède un maximum sur $\mathbb{R}$ et déterminer pour quelles valeurs ce maximum est atteint.

Q16. Soit $x \in]0; +\infty[$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifiant $n \geq n_0$, il existe $k_n \in \mathbb{N}$, tel que $x \in J_{k_n,n}$. Vérifier qu'alors :

$$k_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x\sqrt{2n}}{2} \quad ; \quad t_{k_n,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} x \quad ; \quad k_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

Q17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que pour tout $k \in [\![0; 2n]\!]$, $h_n(t_{k,n}) = a_{k,n}$. Montrer ensuite, en utilisant les résultats des **Q5**, **Q12**, **Q16**, que la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et préciser sa limite.

La convergence simple de cette suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une étape importante permettant de démontrer un cas particulier du théorème de Moivre-Laplace :

Théorème

Pour tous réels $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}t.$$

PROBLÈME 2

Factorisation QR

Présentation

Ce problème s'intéresse dans la **partie I** à des propriétés des matrices de rang 1. Certaines de ces matrices sont ensuite utilisées dans la **partie II** pour construire des matrices orthogonales permettant dans la **partie III** de prouver l'existence d'une factorisation QR pour une matrice carrée quelconque.

Notations

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note $M_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des matrices réelles carrées de taille n est noté $M_n(\mathbb{R})$.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$: on note également A l'endomorphisme de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à X associe AX.
Pour tout $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, A^T désigne la matrice transposée de A.
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^k = 0$.
L'ensemble $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. En identifiant $M_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a pour tous $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y \quad \text{et} \quad \|X\|^2 = \langle X, X \rangle .$$

On suppose dans tout ce problème que $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel vérifiant $n \geq 2$.

Partie I - Matrices de rang 1

I.1 - Une expression des matrices de rang 1

Q18. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tels que $A = XY^T$.

Q19. Réciproquement, soient $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Montrer que la matrice XY^T est de rang 1.

I.2 - Quelques propriétés

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

Q20. Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$.

Q21. En déduire, par récurrence sur k, une expression de A^k en fonction de A pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q22. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit nilpotente.

Q23. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit diagonalisable.

Partie II - Matrices de Householder

II.1 - Un exemple

On définit :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) .$$

Q24. Calculer A^2. En déduire un polynôme annulateur de A.

Q25. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Q26. Montrer que les sous-espaces propres de A sont orthogonaux.

Q27. Déterminer une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$, telles que $P^T AP = D$.

Q28. Interpréter géométriquement l'endomorphisme A de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

II.2 - Matrices de Householder

Soit $V \in M_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$. On définit $P_V, Q_V \in M_n(\mathbb{R})$ par :

$$P_V = \frac{1}{\|V\|^2} VV^T \quad \text{et} \quad Q_V = I_n - 2\frac{1}{\|V\|^2} VV^T. \tag{1}$$

Q29. Montrer que $\operatorname{Im} P_V = \operatorname{Vect}(V)$ et que $\operatorname{Ker} P_V = \operatorname{Vect}(V)^\perp$.

Q30. Montrer que P_V est la projection orthogonale sur la droite $\operatorname{Vect}(V)$.
Préciser le rang et la trace de la matrice P_V.

Q31. Montrer que Q_V est symétrique et orthogonale.

Q32. Montrer que Q_V est la symétrie orthogonale par rapport à $\operatorname{Vect}(V)^\perp$.

Partie III - Factorisation QR

III.1 - Un résulat préliminaire

Soient $U, V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que $\|U\| = \|V\|$. On note $D = \operatorname{Vect}(U - V)$.

Q33. Montrer que $D^\perp$ est l'ensemble des $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que $\|X - U\| = \|X - V\|$.

Q34. Donner la décomposition de U sur la somme directe $M_{n,1}(\mathbb{R}) = D \oplus D^\perp$.

Q35. On suppose U et V non colinéaires. Calculer $Q_{U-V}U$ où Q_{U-V} est définie en (1).

Q36. En déduire que pour tous $\widetilde{U}, \widetilde{V} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale Q, telle que $Q\widetilde{U}$ est colinéaire à $\widetilde{V}$.

III.2 - Factorisation QR

Q37. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1, telle que Q_1A soit de la forme :

$$Q_1A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } C_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Q38. En raisonnant par récurrence sur n, montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale, telle que QA soit triangulaire supérieure.

FIN

22 1176 – D'après documents fournis