

## Étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel  $n$ , c'est-à-dire du nombre de décompositions de  $n$  en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté  $p_n$ , est donnée en début de partie C. Dans la partie A, on introduit une fonction  $P$  de variable complexe; dans la fin de la partie C on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert complexe, de la série entière  $\sum_{n \geq 0} p_n z^n$ . Dans la partie B, on étudie  $P$  au voisinage de 1 en variable réelle. Cette étude est mise à profit, dans la partie D, pour obtenir une domination de bonne qualité de la suite  $(p_n)$ .

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de  $\mathbb{C}$  sera noté

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

On admettra aussi l'identité classique suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

### A. Fonctions $L$ et $P$

1 ▷ Soit  $z \in D$ . Montrer la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ . Préciser la valeur de sa somme lorsque  $z \in ]-1, 1[$ . On notera

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.$$

2 ▷ Soit  $z \in D$ . Montrer que la fonction  $\Phi : t \mapsto L(tz)$  est dérivable sur un intervalle ouvert incluant  $[-1, 1]$  et donner une expression simple de sa dérivée sur  $[-1, 1]$ .

3 ▷ Soit  $z \in D$ . Montrer que la fonction  $\Psi : t \mapsto (1 - tz)e^{L(tz)}$  est constante sur  $[0, 1]$ , et en déduire que

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}.$$

1/2 4 ▷ Montrer que  $|L(z)| \leq -\ln(1 - |z|)$  pour tout  $z$  dans  $D$ .

En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} L(z^n)$  est convergente pour tout  $z$  dans  $D$ .

Dans la suite, pour tout  $z \in D$  on note

$$P(z) := \exp \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n) \right].$$

2. (h) Soit  $z \in D$ . Vérifier que  $P(z) \neq 0$ , que

$$P(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1-z^n}$$

et que pour tout réel  $t > 0$ ,

$$\ln P(e^{-t}) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - e^{-nt}).$$

## B. Développement asymptotique en variable réelle

Dans cette partie, on introduit la fonction  $q$  qui à tout réel  $x$  associe le nombre réel  $q(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ , où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ .

6 ▷ Montrer que  $q$  est continue par morceaux sur  $\mathbf{R}$ , qu'elle est 1-périodique et que la fonction  $|q|$  est paire.

7 ▷ Montrer que  $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu} - 1} du$  est bien définie pour tout réel  $t > 0$ .

8 ▷ Montrer que pour tout entier  $n > 1$ ,

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u} du = \ln(n!) + (n-1) - n \ln(n) - \frac{1}{2} \ln(n) = \ln\left(\frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}\right) - 1.$$

9 ▷ Montrer que  $\int_{[x]}^x \frac{q(u)}{u} du$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , et en déduire la convergence de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} du$ , ainsi que l'égalité

$$\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} du = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

10 ▷ À l'aide d'un développement en série sous l'intégrale, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-u}) du = -\frac{\pi^2}{6}.$$

11 ▷ Montrer que

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1 - e^{-tu}}{t}\right) du \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} -1.$$

On pourra commencer par établir que  $x \mapsto \frac{1 - e^{-x}}{x}$  est décroissante sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

Pour  $k \in \mathbf{N}^*$  et  $t \in \mathbf{R}_+$ , on pose

$$u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1} du \quad \text{si } t > 0, \quad \text{et} \quad u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{q(u)}{u} du \quad \text{si } t = 0.$$

12 ▷ Montrer que  $u_k$  est continue sur  $\mathbf{R}_+$  pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ .

13 ▷ Soit  $t \in \mathbf{R}_+^*$ . Montrer successivement que  $|u_k(t)| = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu} - 1} du$

puis  $u_k(t) = (-1)^k |u_k(t)|$  pour tout entier  $k \geq 1$ , et établir enfin que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t) \right| \leq \frac{1}{2n}.$$

On admettra dans la suite que cette majoration vaut encore pour  $t = 0$ .

14 ▷ En déduire que

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1} du \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

15 ▷ Montrer, pour tout réel  $t > 0$ , l'identité

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1} du = -\frac{1}{2} \ln(1 - e^{-t}) - \ln P(e^{-t}) - \int_1^{+\infty} \ln(1 - e^{-tu}) du.$$

16 ▷ Conclure que

$$\ln P(e^{-t}) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1) \quad \text{quand } t \text{ tend vers } 0^+.$$

### C. Développement de $P$ en série entière

Pour  $(n, N) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ , on note  $P_{n,N}$  l'ensemble des listes  $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbf{N}^N$  telles que  $\sum_{k=1}^N ka_k = n$ . Si cet ensemble est fini, on note  $p_{n,N}$  son cardinal.

17 ▷ Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Montrer que  $P_{n,N}$  est inclus dans  $[0, n]^N$  et non vide pour tout  $N \in \mathbf{N}^*$ , que la suite  $(p_{n,N})_{N \geq 1}$  est croissante et qu'elle est constante à partir du rang  $\max(n, 1)$ .

Dans toute la suite, on notera  $p_n$  la valeur finale de  $(p_{n,N})_{N \geq 1}$ .

18 ▷ Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Donner une suite  $(a_{n,N})_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\forall z \in D, \frac{1}{1-z^N} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N} z^n.$$

En déduire, par récurrence, la formule

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall z \in D, \prod_{k=1}^N \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

19 ▷ On fixe  $\ell \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1[$ . En utilisant le résultat de la question précédente, établir la majoration  $\sum_{n=0}^{\ell} p_n x^n \leq P(x)$ . En déduire le rayon de convergence de la série entière  $\sum_n p_n z^n$ .

20 ▷ Soit  $z \in D$ . En examinant la différence  $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$ , démontrer que

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

21 ▷ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que pour tout réel  $t > 0$ ,

$$p_n = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{P(e^{-t} e^{i\theta})}{P(e^{-t})} d\theta. \quad (1)$$

Dans le reste du problème, l'objectif est d'utiliser la formule (1) pour obtenir un contrôle assez fin du nombre  $p_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## D. Contrôle de $P$

22 ▷ Soit  $x \in [0, 1[$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . En utilisant la fonction  $L$ , montrer que

$$\left| \frac{1-x}{1-xe^{i\theta}} \right| \leq \exp(-(1-\cos\theta)x).$$

En déduire que pour tout  $x \in [0, 1[$  et tout réel  $\theta$ ,

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right).$$

23 ▷ Soit  $x \in ]0, 1[$  et  $\theta$  un réel. Montrer que

$$\frac{1}{1-x} - \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) \geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta))}$$

En déduire que si  $x \geq \frac{1}{2}$  alors

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right) \quad \text{ou} \quad \left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

Pour ce dernier résultat, on distinguera deux cas selon les valeurs relatives de  $x(1-\cos\theta)$  et  $(1-x)^2$ .

24 ▷ Montrer qu'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi], \quad 1 - \cos\theta \geq \alpha \theta^2.$$

En déduire qu'il existe trois réels  $t_0 > 0$ ,  $\beta > 0$  et  $\gamma > 0$  tels que, pour tout  $t \in ]0, t_0[$  et tout  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,

$$\left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right| \leq e^{-\beta(t^{-3/2}\theta)^2} \quad \text{ou} \quad \left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right| \leq e^{-\gamma(t^{-3/2}|\theta|)^{2/3}}.$$

25 ▷ En déduire que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})} d\theta = O(t^{3/2}) \quad \text{quand } t \text{ tend vers } 0^+.$$

## E. Conclusion

26 ▷ En prenant  $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$  dans (1), conclure que

$$p_n = O\left(\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n}\right) \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

**Épilogue.** Le dernier résultat est très proche de l'optimalité. Par une analyse plus fine de l'intégrale dans la formule (1), on peut en effet établir l'équivalent

$$p_n \sim \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}n} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

formule découverte par Hardy et Ramanujan en 1918.

FIN DU PROBLÈME