Concours commun

Mines-Ponts

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2022

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Tournez la page S.V.P.

Matrices de Hurwitz

Notations

- n désigne un entier naturel non nul.
- $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
- $M_n(\mathbf{K})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n et à coefficients dans $\mathbf{K}$ et pour une matrice M de $M_n(\mathbf{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique.
- $\mathbf{K}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- $\mathrm{Re}^- = \{z \in \mathbf{C} / \mathrm{Re}(z) < 0\}$.
- On désigne par $< .,. >$ le produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^n$ et $\|.\|$ sa norme associée :

$$< (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

- On confondra abusivement, pour le calcul matriciel, le vecteur $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbf{K}^n$ avec la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$.
- Pour $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbf{C}^n$, on notera son conjugué $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$, sa partie réelle $Re(X) = \dfrac{X + \overline{X}}{2}$ et sa partie imaginaire $Im(X) = \dfrac{X - \overline{X}}{2i}$.
- Si $M \in M_n(\mathbf{R})$, l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ (respectivement $\mathbf{C}^n$) canoniquement associé à M est

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R}^n \\ X & \mapsto & MX \end{array} \quad \left(\text{respectivement} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^n & \to & \mathbf{C}^n \\ X & \mapsto & MX \end{array}\right)$$

Rappels

1) Deux matrices A et B de $M_n(\mathbf{K})$ sont semblables dans $M_n(\mathbf{K})$ si il existe une matrice P de $M_n(\mathbf{K})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Deux matrices A et B de $M_n(\mathbf{R})$ sont semblables dans $M_n(\mathbf{C})$ si il existe une matrice P de $M_n(\mathbf{C})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

2) Soient R et S deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$. R est un diviseur de S s'il existe un polynôme Q de $\mathbf{K}[X]$ tel que $S = QR$.

Les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Objectifs

- Il s'agit d'établir pour un système différentiel linéaire d'ordre 1, une équivalence entre des propriétés qualitatives des solutions et des conditions portant sur la nature de la matrice asssociée à ce système et de son polynôme caractéristique.
- La partie 1 concerne l'étude de propriétés de matrices semi-simples.
- La partie 2 propose de trouver une caractérisation de matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$.
- La partie 3 est consacrée à l'étude des polynômes de Hurwitz.
- Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.
- La partie 4, sur l'équivalence anoncée pour les systèmes différentiels, utilise des résultats des parties 1 et 3.

1 Matrices semi-simples

Définition 1 *Une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ est dite **semi-simple** si elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$.*

Définition 2 *Une matrice M de $M_n(\mathbf{R})$ est dite **presque diagonale** s'il existe :*

i) *deux entiers naturels p et q ;*

ii) *q réels $a_1, a_2, \dots, a_q$;*

iii) *q réels non nuls $b_1, b_2, \dots, b_q$;*

iv) *une matrice D diagonale de $M_p(\mathbf{R})$ tels que $p+2q=n$ et M est la matrice bloc suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & M(a_1,b_1) & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M(a_2,b_2) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & M(a_q,b_q) \end{pmatrix}$$

où, $\forall j \in [\![1 \,;\, q]\!]$: $M(a_j,b_j) = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$. Si $p=0$, la matrice D n'est pas présente dans la matrice diagonale par blocs M. De même, si $q=0$, alors $M=D$.

Soit A la matrice de $M_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1 ▷ La matrice A est-elle semi-simple ?

Soit B la matrice de $M_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

2 ▷ Démontrer que B est semi-simple et en déduire l'existence d'une matrice Q de $M_2(\mathbf{R})$ inversible et de deux réels a et b à déterminer tels que :

$$B = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Indication : on pourra, pour un vecteur propre V de B, introduire les vecteurs $W_1 = Re(V)$ et $W_2 = Im(V)$.

Soit M une matrice de $M_2(\mathbf{R})$.

On suppose dans la question 3) seulement que M admet deux valeurs propres complexes $\mu = a + ib$ et $\overline{\mu} = a - ib$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}^*$.

3 ▷ Démontrer que M est semi-simple et semblable dans $M_2(\mathbf{R})$ à la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

4 ▷ Démontrer que M est semi-simple si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

i) M est diagonalisable dans $M_2(\mathbf{R})$;

ii) χ_M admet deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle.

5 ▷ Soit N une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ semblable à une matrice presque diagonale. Démontrer que N est semi-simple.

6 ▷ Soit N une matrice de $M_n(\mathbf{R})$. Donner la forme factorisée de χ_N dans $\mathbf{C}[X]$, en précisant dans les notations, les racines réelles et les racines complexes conjuguées. En déduire que si N est semi-simple alors elle est semblable dans $M_n(\mathbf{R})$ à une matrice presque diagonale.

2 Une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$

Dans cette partie, E désigne un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n et u désigne un endomorphisme de E.

On suppose dans les questions 7), 8) et 9) que u est diagonalisable. On note $\mathcal{B} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Soit F un sous-espace vectoriel de E, différent de $\{0_E\}$ et de E.

7 ▷ Démontrer qu'il existe $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$ tel que $v_k \notin F$ et qu'alors F et la droite vectorielle engendrée par v_k sont en somme directe.

On note alors

$$\mathcal{A} = \Big\{H \text{ sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } u(H) \subset H \text{ et } F \cap H = \{0_E\}\Big\}$$

et

$$\mathcal{L} = \Big\{p \in \mathbf{N}^*\ \exists H \in \mathcal{A} : p = \dim(H)\Big\}.$$

8 ▷ Démontrer que $\mathcal{L}$ admet un plus grand élément que l'on nommera r.

9 ▷ Démontrer que F admet un supplémentaire G dans E, stable par u.

10 ▷ On suppose que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E, stable par u. Démontrer que u est diagonalisable. En déduire une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde et introduire un sous-espace vectoriel, dont on justifiera l'existence, de dimension $n-1$ et contenant la somme des sous-espaces propres de u.

3 Polynômes de Hurwitz

Définition 3 *Un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ est dit polynôme de Hurwitz si ses racines dans $\mathbf{C}$ appartiennent à $\mathrm{Re}^- = \{z \in \mathbf{C} / \mathrm{Re}(z) < 0\}$.*

Définition 4 *Un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ est dit à coefficients strictement positifs s'il est non nul et si, d désignant son degré, $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $a_k > 0$*

11 ▷ Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Démontrer que si α est une racine d'un polynôme P de $\mathbf{R}[X]$, à coefficients strictement positifs, alors $\alpha < 0$.

12 ▷ Démontrer que tout diviseur d'un polynôme de Hurwitz est un polynôme de Hurwitz.

13 ▷ Soit P un polynôme de Hurwitz de $\mathbf{R}[X]$ irréductible et à coefficient dominant positif. Démontrer que tous les coefficients de P sont strictement positifs.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soient $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$. On définit les deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $\mathbf{C}[X]$ par :

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k) \quad \text{et} \quad Q(X) = \prod_{(k,l) \in [\![1\ ;\ n]\!]^2} (X - z_k - z_l)$$

14 ▷ On suppose $n = 2$ et $P \in \mathbf{R}_2[X]$. Si les coefficients de Q sont strictement positifs, P est-il alors un polynôme de Hurwitz ?

15 ▷ Soient A et B deux polynômes de $\mathbf{R}[X]$ dont tous les coefficents sont strictement positifs. Démontrer que les coefficients du produit AB sont également strictement positifs.

16 ▷ Démontrer que si P et Q sont dans $\mathbf{R}[X]$, alors on a l'équivalence : P est un polynôme de Hurwitz si et seulement si les coefficients de P et Q sont strictement positifs.

4 Système différentiel de matrice associée semi-simple

Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. On note (S) le système différentiel :

$$(S) \quad X' = MX$$

où X est une application de la variable t de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$, dérivable sur $\mathbf{R}$.

Soit $T \in M_n(\mathbf{R})$. On suppose que M est semblable à T dans $M_n(\mathbf{R})$ et on note (S^*) le système différentiel

$$(S^*) \quad Y' = TY$$

17 ▷ Démontrer que les coordonnées d'une solution X de (S) sont combinaisons linéaires des coordonnées d'une solution Y de (S^*).

Dans les deux questions suivantes 18) et 19), on suppose $n = 2$, on note alors $X = (x\,; y)$ où x et y sont deux fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et on pose $z = x + iy$.

On suppose qu'il existe a et b réels tels que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

18 ▷ Démontrer que X est solution de (S) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à déterminer. En déduire une expresssion, en fonction de t, des coordonnées des solutions de (S).
Résoudre le système $X' = BX$ où B est la matrice de la question 2).

19 ▷ Soit $M \in M_2(\mathbf{R})$ semi-simple. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur les parties réelles et imaginaires des valeurs propres de M, pour que toute solution de (S) ait chacune de ses coordonnées qui tende vers 0 en $+\infty$.

On reprend le cas général $n \geq 2$ et on considère les assertions suivantes :

$\mathbf{A}_1$ χ_M est un polynôme de Hurwitz ;

$\mathbf{A}_2$ Les solutions de (S) tendent vers $0_{\mathbf{R}^n}$ quand t tend vers $+\infty$;

$\mathbf{A}_3$ Il existe $\alpha > 0$, il existe $k > 0$ tels que pour toute solution Φ de (S),

$$\forall t \geq 0 \quad : \quad \|\Phi(t)\| \leq k e^{-\alpha t} \|\Phi(0)\|.$$

Soit $T \in M_n(\mathbf{R})$. On suppose que T vérifie la condition suivante :

$$(C) \quad \exists \beta \in \mathbf{R}_+^*, \forall X \in \mathbf{R}^n \ : \quad < TX, X > \leq -\beta \|X\|^2.$$

20 ▷ Démontrer que A_3 est vraie avec $k = 1$ pour toute solution Φ de (S^*).
Indication : on pourra introduire la fonction $t \mapsto e^{2\beta t}\|\Phi(t)\|^2$.

21 ▷ On suppose que $M \in M_n(\mathbf{R})$ est semi-simple. Démontrer que les assertions A_1, A_2 et A_3 sont équivalentes.
Indication : on pourra commencer par A_3 *implique* A_2.

Fin du problème