ECOLE POLYTECHNIQUE
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2022

FILIERE MP – Épreuve n° 1
MATHEMATIQUES A (XLCR)

## — Notations et rappels —

- Dans tout le problème, $p$ désigne un entier *strictement positif.*

- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Pour tous entiers $a$ et $b$ dans $\mathbb{N}$ tels que $a \leqslant b$, on note $[\![a, b]\!] = \{n \in \mathbb{N} \mid a \leqslant n \leqslant b\}$.

On note $\mathfrak{S}_p$ le groupe des permutations de l'ensemble fini $[\![1, p]\!]$ muni de la composition.

On note $\epsilon : \mathfrak{S}_p \to \{-1, +1\}$ l'application signature, définie comme l'unique morphisme de groupes de $(\mathfrak{S}_p, \circ)$ dans $(\{-1, +1\}, \times)$ qui vaut $-1$ sur toutes les transpositions.

- On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille $p \times p$. Pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in (\mathbb{R}^p)^p$, on appelle produit mixte de $(x_1, \ldots, x_p)$ la quantité

$$[x_1, \ldots, x_p] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{p} x_{\sigma(i),i}$$

où pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on a noté $x_j = (x_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{R}^p$. En particulier, si on note $(x_1 | \cdots | x_p)$ la matrice de taille $p \times p$ élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont données par les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$, on a donc l'égalité $[x_1, \ldots, x_p] = \det((x_1 | \cdots | x_p))$ où det est le déterminant usuel.

- Si $F$ et $G$ sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, on dit que $f : F^p \to G$ est $p$-linéaire alternée si pour tout $u = (u_1, \ldots, u_p) \in F^p$ et tout $i \in [\![1, p]\!]$, l'application

$$y \mapsto f(u_1, \ldots, u_{i-1}, y, u_{i+1}, \ldots, u_p)$$

de $F$ dans $G$ est linéaire et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ on a

$$f(u \cdot \sigma) = \epsilon(\sigma) f(u)$$

où $u \cdot \sigma = \left(u_{\sigma(i)}\right)_{1 \leqslant i \leqslant p}$.

On notera $\mathcal{A}_p(F, G)$ l'ensemble des applications $p$-linéaires alternées de $F^p$ dans $G$.

- Dans tout le problème, on considère un espace euclidien $E$ de dimension $d \geqslant 1$ muni de son produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$. On note pour $x \in E, \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ la norme associée.

- Pour tout entier $q$ non nul, et toute famille $(u_1, \ldots, u_q)$ d'éléments de $E$, Vect $(u_1, \ldots, u_q)$ désigne le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $u_1, \ldots, u_q$.

- Pour tous $u = (u_1, \ldots, u_p)$ et $v = (v_1, \ldots, v_p)$ dans $E^p$, on note $\mathrm{Gram}(u, v)$, la matrice carrée de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie pour tous $i, j \in [\![1, p]\!]$ par

$$\mathrm{Gram}(u, v)_{i,j} = \langle u_i, v_j\rangle\,.$$

## — Partie I —

Soient $V$ et $V'$ deux sous-espaces de $E$ de dimension $p$ (on rappelle que $p \geqslant 1$ ).

(1) (a) Montrer qu'il existe $u_1 \in V$ et $u'_1 \in V'$ de norme 1 tels que

$$\langle u_1, u'_1\rangle = \sup\left\{\langle a, a'\rangle \mid (a, a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1\right\}.$$

(b) Étendre ce résultat en montrant qu'il existe une famille $u = (u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs de $V$ et une famille $u' = \left(u'_1, \ldots, u'_p\right)$ de vecteurs de $V'$ telles que $u$ et $u'$ soient orthonormées et vérifient les deux conditions suivantes :

(i) Pour $k = 1$, on a

$$\langle u_1, u'_1\rangle = \sup\left\{\langle a, a'\rangle \mid (a, a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1\right\}.$$

(ii) Pour $k \in [\![2, p]\!]$, on a

$$\begin{gathered}\langle u_k, u'_k\rangle = \sup\{\langle a, a'\rangle \mid (a, a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1,\\ \langle a, u_l\rangle = \langle a', u'_l\rangle = 0 \text{ pour tout } l \in [\![1, k-1]\!]\}\,.\end{gathered}$$

*(Indication : On pourra construire les vecteurs $u_k$ et $u'_k$ par récurrence sur l'entier $k$.)*

On fixe deux telles familles $u$ et $u'$ dans le reste de la partie I.

(2) Montrer que si $\dim(V \cap V') \geqslant 1$, on a $u_k = u'_k$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant \dim(V \cap V')$.

(3) (a) Montrer que $u$ est une base orthonormée de $V$.

(b) Montrer que pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, on a $u'_k \in \operatorname{Vect}(u_{k+1}, \ldots, u_p)^{\perp}$.

*(Indication : on pourra considérer l'application* $t \mapsto u_k(t) = \frac{u_k + t u_\ell}{\|u_k + t u_\ell\|}$ *pour tous* $t \in \mathbb{R}$ *et* $\ell \in [\![k+1, p]\!]$ *ainsi que sa dérivée.)*

(c) Montrer que $u_{k+1} \in (\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_k) + \operatorname{Vect}(u'_1, \ldots, u'_k))^{\perp}$ pour tout $k$ élément de $[\![1, p-1]\!]$.

(d) En déduire que les sous-espaces $W_k = \operatorname{Vect}(u_k, u'_k)$ pour $k \in [\![1, p]\!]$ sont orthogonaux deux à deux.

(4) (a) Montrer qu'il existe $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \cdots \leqslant \theta_p \leqslant \pi/2$ tel que $\cos(\theta_k) = \langle u_k, u'_k \rangle$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

(b) Calculer la valeur de $\det(\operatorname{Gram}(u, u'))$ en fonction des $\cos(\theta_k)$.

(c) En déduire que $\det(\operatorname{Gram}(u, u')) \leqslant 1$. Que dire sur $V$ et $V'$ dans le cas d'égalité ?

## — Partie II —

Pour tout $e \in E^p$, on considère $\Omega_p(e) : E^p \to \mathbb{R}$ définie pour tout $u \in E^p$ par

$$\Omega_p(e)(u) = \det(\operatorname{Gram}(e, u)).$$

(5) (a) Vérifier que l'application $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto [x_1, \ldots, x_p]$ appartient à $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

(b) Vérifier que si $F$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et si $f : F \to \mathbb{R}^p$ est linéaire, alors $g : F^p \to \mathbb{R}$ définie pour $u = (u_1, \ldots, u_p) \in F^p$ par $g(u) = [f(u_1), \ldots, f(u_p)]$ est un élément de $\mathcal{A}_p(F, \mathbb{R})$.

(6) (a) Montrer que pour tout $e \in E^p$, on a $\Omega_p(e) \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.

(b) Vérifier que pour tout $(e, u) \in E^p \times E^p$, on a $\Omega_p(e)(u) = \Omega_p(u)(e)$.

(c) Montrer que $\Omega_p \in \mathcal{A}_p(E, \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R}))$.

(7) (a) Soient $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), e = (e_1, \ldots, e_p)$ et $e' = \left(e'_1, \ldots, e'_p\right)$ dans $E^p$ vérifiant $e'_i = \sum_{j=1}^{p} M_{ij} e_j$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Montrer que $\Omega_p(e') = \det(M) \Omega_p(e)$.

(b) Soit $e \in E^p$. Montrer que $\Omega_p(e) \neq 0$ si et seulement si $e$ est une famille libre.

(c) Vérifier que $\Omega_p(e)(e) \geqslant 0$ pour toute famille $e \in E^p$. Dans la suite pour tout $e \in E^p$, on appelle $p$-volume de $e$ la quantité

$$\operatorname{vol}_p(e) = \sqrt{\Omega_p(e)(e)} = \left(\det(\operatorname{Gram}(e,e)\right)^{1/2}$$

(8) (a) Calculer $\operatorname{vol}_p(b)$ lorsque $b = (b_1, \ldots, b_p)$ est une famille orthonormée de vecteurs de $E$.

(b) On suppose ici que $p \geqslant 2$. Soit $e = (e_1, \ldots, e_p) \in E^p$. On note pr la projection orthogonale sur l'orthogonal de l'espace engendré par la famille $e_2^p = (e_2, \ldots, e_p)$. Montrer que $\operatorname{vol}_p(e) = \|\operatorname{pr}(e_1)\| \operatorname{vol}_{p-1}(e_2^p)$.

(c) Pour toute famille libre $e = (e_1, \ldots, e_p) \in E^p$, montrer qué $\operatorname{vol}_p(e) \leqslant \prod_{i=1}^p \|e_i\|$ avec égalité si et seulement si $e$ est une famille de vecteurs orthogonaux 2 à 2.

(9) (a) Montrer que si $e \in E^p$ est une famille libre et si $b \in E^p$ est une base orthonormée de Vect $(e)$, alors $\operatorname{vol}_p(e) = |\det(P_b^e)|$ où $P_b^e$ est la matrice de passage de $b$ à $e$ i.e. $e_j = \sum_{i=1}^p (P_b^e)_{ij} b_i$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.

(b) Montrer que pour tous $e, e' \in E^p$, on a $|\Omega_p(e)(e')| \leqslant \operatorname{vol}_p(e) \operatorname{vol}_p(e')$.

## — Partie III —

Soient $e = (e_1, \ldots, e_d)$ une base orthonormée de $E, p$ un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant d$ et $\mathcal{I}_p = \{\alpha = (i_1, \ldots, i_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant d\}$. Pour tout $\alpha = (i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{I}_p$, on note $e_\alpha = (e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \in E^p$ et pour tous $\omega$ et $\omega'$ éléments de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$

$$\langle \omega, \omega' \rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha) \omega'(e_\alpha).$$

(10) (a) Montrer que pour tout $\omega \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$, on a $\omega = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha) \Omega_p(e_\alpha)$.

(b) En déduire que $(\omega, \omega') \mapsto \langle \omega, \omega' \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ pour lequel $(\Omega_p(e_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{I}_p}$ est une base orthonormée de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ et donner la dimension de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.

(c) Construire dans le cas $p = d - 1$ une isométrie entre $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ et $E$.

(11) On considère $u, v \in E^p$. Montrer que

$$\Omega_p(u)(v) = \langle \Omega_p(u), \Omega_p(v) \rangle.$$

(12) Montrer que le produit scalaire $(\omega, \omega') \mapsto \langle \omega, \omega' \rangle$ défini par (1) ne dépend que du produit scalaire sur $E$ et non du choix de la base orthonormée $e$.

## — Partie IV —

Soit $p \in [\![1, d]\!]$. On définit une relation sur l'ensemble des bases d'un sous-espace $V$ de dimension $p$ de $E$ par : $e$ et $e'$ sont en relation di $\det_e(e') > 0$ où $\det_e(e')$ est le déterminant de $e'$ dans la base $e$. On admet que cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de $V$ pour laquelle il existe exactement deux classes d'équivalence appelées orientations de $V$. Un sous-espace orienté est un couple $(V, C)$ où $C$ est une orientation de $V$.

On note $\widetilde{\mathrm{Gr}}(p, E)$ l'ensemble des sous-espaces orientés de dimension $p$ de $E$.

(13) (a) Montrer que si $e$ et $e'$ sont deux familles libres de cardinal $p$ de $E$ alors $\Omega_p(e)$ et $\Omega_p(e')$ sont colinéaires si et seulement si $\mathrm{Vect}(e) = \mathrm{Vect}(e')$.

(b) Montrer que pour tout sous-espace vectoriel orienté $(V, C)$ de dimension $p$ de $E$, il existe une unique $\Psi(V, C) \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ tel que pour tout $e \in C$ on a $\Omega_p(e) = \mathrm{vol}_p(e)\Psi(V, C)$.

(14) On munit $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ du produit scalaire introduit dans la partie III.

(a) Vérifier que $\Psi : (V, C) \mapsto \Psi(V, C)$ est une injection de $\widetilde{\mathrm{Gr}}(p, E)$ dans la sphère de rayon 1 de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.

(b) Montrer que $\Psi(\widetilde{\mathrm{Gr}}(p, E))$ est une partie compacte de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.

(15) Montrer que $\Psi(\widetilde{\mathrm{Gr}}(p, E))$ est une partie connexe par arcs de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ si et seulement si $p \leqslant d - 1$.

*(Indication : On pourra utiliser la question 3d.)*

**⋆ Fin de l'épreuve ⋆**