CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.

EXERCICE I

Dans cet exercice d'informatique commune, on se propose d'écrire des algorithmes dans le but de faire du calcul matriciel et plus particulièrement afin d'utiliser les matrices d'adjacence d'un graphe. Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage **Python**. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code. L'usage de toute librairie est **interdit**.

Notation

Les matrices sont carrées et représentées par des listes dont les éléments correspondent aux lignes de la matrice. Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est représentée par la liste $[[1,2],[3,4]]$.

Dans la suite, pour définir la matrice d'adjacence $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'un graphe ayant n sommets, on numérote ses sommets de 0 à $n-1$.

Q1. Écrire une fonction $produit(A,B)$ prenant en arguments deux matrices carrées A et B de mêmes dimensions et qui renvoie AB le produit de la matrice A par la matrice B.

Q2. Écrire une fonction $oriente(A)$ prenant en argument la matrice d'adjacence A d'un graphe et qui retourne *True* si le graphe est orienté et *False* sinon.

Q3. *On admet que le nombre de chemins de longueur p reliant i et j dans un graphe de matrice d'adjacence A est égal au coefficient d'indice (i,j) de la matrice A^p.*

Écrire une fonction $distance(A,i,j)$ où A est la matrice d'adjacence d'un graphe et qui renvoie le nombre minimal d'arêtes que l'on doit parcourir pour atteindre le sommet j depuis le sommet i (on suppose qu'un tel chemin existe).

On considère deux tables : CLIENTS et PARTENAIRES. La première contient des informations sur les clients et la deuxième permet d'identifier qui sont les partenaires des clients.

La table CLIENTS contient les attributs suivants :
- id : identifiant d'un individu (entier), clé primaire ;
- nom (chaîne de caractères) ;
- prenom (chaîne de caractères) ;
- ville (chaîne de caractères) ;
- email (chaîne de caractères).

La table PARTENAIRES contient les attributs suivants :
- id : identifiant de suivi (entier), clé primaire ;
- id_client : identifiant du client représenté par l'attribut **id** dans la table CLIENTS (entier) ;
- partenaire : nom du partenaire (chaîne de caractères).

Q4. Écrire une requête SQL permettant d'extraire les identifiants de tous les clients provenant de la ville de « Toulouse ».

Q5. Écrire une requête SQL permettant d'extraire les emails de tous les clients ayant « SCEI » comme partenaire.

EXERCICE II

On définit la fonction $f:(x,y)\mapsto x^2-2xy+2y^2+e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Q6. Établir que l'équation $e^{-x}=x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Q7. Démontrer que f possède un unique point critique $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

Q8. À l'aide de la matrice hessienne, démontrer que f admet un extremum local en (x_0,y_0). Est-ce un minimum ou un maximum ?

PROBLÈME

Dans tout le problème, α est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On pose :

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J(\alpha)=\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x.$$

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q9. Démontrer que $x\mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

Q10. Démontrer que $J(\alpha)=I(1-\alpha)$.

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q11. <u>1[re] tentative</u>

Pour tout $x\in]0,1[$, on pose $f_n(x)=(-1)^n\,x^{n+\alpha-1}$. Montrer que :

$$\forall x\in]0,1[,\ \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1[$?

Q12. 2[e] tentative
Pour tout $x \in]0,1[$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1}.$$

À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$I(\alpha) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q13. En déduire que :

$$I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha\cos(nx)}{\alpha^2 - n^2}\right).$$

Q14. Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

et

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

Q15. Démontrer que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

Q16. Démontrer que f_α est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

✓ **Q17.** Démontrer que f_α est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

/ **Q18.** Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\alpha(x)$.

/ **Q19.** Démontrer que $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. En déduire :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

Partie III - Vers la formule des compléments

/ **Q20.** Pour tout $x \in]0,+\infty[$, démontrer que :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}.$$

/ **Q21.** Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on pose :

$$g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

Vérifier que g_α est une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

En déduire que $\forall x \in]0,+\infty[,\ f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$.

/ **Q22.** En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

/ **Q23.** Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

v **Q24.** En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

FIN