

# Epreuve de mathématiques

## CCP 2023 PSI

### Exercice

#### Fonctions de Bessel

Soit une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note :

$$W_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t) dt$$

**Q1.** Montrer que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

**Q2.** Montrer que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et donner des expressions sous forme d'intégrales de  $f'(x)$  et  $f''(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Q3.** Soit une fonction  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x, t) = \cos(t) \sin(x \sin(t)).$$

Justifier l'existence de  $\frac{\partial h}{\partial t}$ , puis déterminer  $\frac{\partial h}{\partial t}(x, t)$  pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ .

**Q4.** En déduire que  $f$  est solution de l'équation différentielle :

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

**Q5.** On suppose qu'il existe une solution de (E) développable en série entière notée  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  de rayon de convergence  $R > 0$ .

Montrer que  $a_1 = 0$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  :

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$$

**Q6.** En utilisant un théorème d'interversion série intégrale, montrer que  $f$  est développable en série entière au voisinage de 0 et exprimer les coefficients du développement de  $f$  en fonction des termes de la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$

**Q7.** Déduire des questions précédentes que  $f$  est l'unique solution développable en série entière de (E) vérifiant  $f(0) = \pi$ .

**Q8.** En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une expression de  $W_n$  en fonction de  $n$ .

## 1 Premier problème. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On considère une particule se déplaçant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial  $t = 0$  est  $k = 0$ . A chaque instant  $t \in \mathbb{N}^*$ , elle se déplace aléatoirement de sa position  $k = \mathbb{Z}$  à la position  $k + 1$  ou  $k - 1$ .

Soit  $p \in ]0; 1[$ . On définit sur un espace probabilisé  $(\Omega, \Sigma, P)$  une suite de variables aléatoires indépendantes  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$  et identiquement distribuées dont la loi est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_t = 1) = p \text{ et } P(X_t = -1) = 1 - p$$

Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{t=1}^n X_t$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $X_t$  modélise le déplacement de la particule à l'instant  $t$ . Si  $X_t = 1$ , la particule se déplace vers la droite. Si  $X_t = -1$ , la particule se déplace vers la gauche. Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n$  modélise la position de la particule après  $n$  déplacements. On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

### 1.1 Un développement en série entière

**Q9.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha \notin \mathbb{N}$ . Donner sans démonstration un développement en série entière de la fonction réelle  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  au voisinage de 0 en précisant son rayon de convergence.

**Q10.** En déduire que pour tout  $x \in ]-1; 1[$  :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n$$

### 1.2 Probabilité de retour à l'origine

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = P(S_n = 0)$$

**Q11.** Pour tout  $t \in \mathbb{N}^*$ , déterminer la loi de la variable aléatoire  $\frac{X_t+1}{2}$ . En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $\sum_{t=1}^n \frac{X_t+1}{2}$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

**Q12.** En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_n = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}} (p(1-p))^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Q13.** Déterminer la limite de la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  selon les valeurs de  $p$  et interpréter le résultat.

### 1.3 Nombre de passages par l'origine

Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on note  $O_{2j}$  la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant  $t = 2j, 0$  sinon. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $T_n = \sum_{j=0}^n O_{2j}$ . On note  $\mathbb{E}(T_n)$  l'espérance de la variable aléatoire  $T_n$ .

Dans cette partie, on souhaite déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$ .

**Q14.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Que modélise la variable aléatoire  $T_n$  ?

**Q15.** Soit  $j \in \mathbb{N}$ . Déterminer la loi de la variable aléatoire  $O_{2j}$ . En déduire que :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^n \binom{2j}{j} (p(1-p))^j$$

**Q16.** On suppose dans cette question que  $p \neq \frac{1}{2}$ . En utilisant le résultat de la Q10, calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$  et interpréter le résultat.

**Q17.** On suppose dans cette question que  $p = \frac{1}{2}$ . Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$

## 2 Deuxième problème. Puissances de matrices et limites de suites de matrices

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . On s'intéresse ici à la convergence de suites matricielles  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  où pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $M_k \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$  avec  $p = 1$  (matrices colonnes) ou  $p = n$  (matrices carrées). Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note alors  $M_k = \left( m_{i,j}^{(k)} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$  ou plus simplement  $M_k = \left( m_{i,j}^{(k)} \right)$ .

On suppose que l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$  est muni d'une norme notée  $\|\cdot\|$  indifféremment des valeurs de  $n$  et  $p$ . En particulier, si  $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ,  $V$  est une matrice colonne assimilée à un vecteur de  $\mathbb{C}^n$  et on note  $\|V\|$  sa norme.

On rappelle que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. la suite  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$  ;
2. la suite des normes  $(\|M_k - A\|)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 ;
3. pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket$ , la suite de nombres complexes  $\left( m_{i,j}^{(k)} \right)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $a_{i,j} \in \mathbb{C}$  (convergence des coefficients de la matrice).

On s'intéresse en particulier à la suite des puissances itérées  $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'une matrice donnée  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

### 2.1 Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 3$ . Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ , on définit la matrice  $M(a, b) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a & b & a \\ a & \cdots & a & a & b \end{pmatrix}$$

et on note  $P_{a,b}$  le polynôme caractéristique de la matrice  $M(a,b)$ .

On note  $I_n$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et on remarque que pour tous réels  $a$  et  $b$ ,

$$M(a,b) = bI_n + aM(1,0)$$

**Q18.** On suppose, dans cette question uniquement, que  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que dans ce cas  $M(a,b)$  est diagonalisable.

**Q19.** Montrer que  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  est un vecteur propre de  $M(a,b)$  et déterminer la valeur propre associée à  $V$ .

**Q20.** Montrer que  $P_{1,0}(X) = (X - (n-1))(X+1)^{n-1}$ .

**Q21.** On suppose que  $a \neq 0$ . Montrer que  $P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\frac{X-b}{a}\right)$ . En déduire l'ensemble des valeurs propres de  $M(a,b)$  ainsi que leurs multiplicités. **Q22.** On définit le polynôme  $Q_{a,b} \in \mathbb{C}[X]$  par  $Q_{a,b}(X) = (X - (b-a))(X - (b + (n-1)a))$ .

Montrer que  $Q_{a,b}$  est un polynôme annulateur de  $M(a,b)$  et en déduire que  $M(a,b)$  est diagonalisable (on distinguera les cas  $a = 0$  et  $a \neq 0$ ).

**Q23.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $a \neq 0$ . Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme  $X^k$  par le polynôme  $Q_{a,b}$  et en déduire une expression de  $M(a,b)^k$  comme combinaison linéaire de  $M(a,b)$  et de  $I_n$ .

**Q24.** Supposons que  $|b-a| < 1$  et  $|b + (n-1)a| < 1$ . Déterminer la limite de la suite de matrices  $(M(a,b)^k)_{k \in \mathbb{N}}$

## 2.2 Limite des puissances d'une matrice

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^n$  muni d'une norme notée  $\|\cdot\|$ . On note sa base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \quad |\lambda| < 1$$

où  $\text{Sp}(u)$  est l'ensemble des valeurs propres de  $u$ . On note  $A$  la matrice de l'endomorphisme  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

L'objectif de cette partie est de montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$ .

On suppose (sauf à la Q29) que  $A = T$  où  $T$  est une matrice triangulaire supérieure :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

**Q25.** Montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u^k(e_1)\| = 0$  et en déduire  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_1)$ .

On suppose qu'il existe  $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$  tel que pour tout  $j \in \llbracket 1; i \rrbracket$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_j) = 0$ .

**Q26.** Montrer qu'il existe  $x \in \text{Vect}(e_j)_{j \in \llbracket 1; i \rrbracket}$  tel que :

$$u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x.$$

En déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)$$

**Q27.** Montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0$ . En déduire que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_{i+1}) = 0$ .

**Q28.** Montrer alors que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = 0$ .

**Q29.** On ne suppose plus que  $A$  est triangulaire supérieure. Montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$ .

### 2.3 Application à la méthode de Gauss-Seide

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$$

On dit alors que  $A$  est une matrice à diagonale strictement dominante. On admet que dans ce cas  $A$  est inversible.

On définit ensuite  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de la manière suivante : pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ ,

- si  $i \geq j$ ,  $m_{i,j} = a_{i,j}$  et  $f_{i,j} = 0$
- si  $i < j$ ,  $m_{i,j} = 0$  et  $f_{i,j} = -a_{i,j}$

Ainsi,  $A = M - F$  où  $F$  est la partie triangulaire supérieure de diagonale nulle de  $-A$  et où  $M$  est la partie triangulaire inférieure de  $A$ . Soit  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ . On note  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  l'unique matrice colonne telle que :

$$AX = Y.$$

Le but de cette partie est de trouver une suite qui converge vers  $X$ .

**Q30.** Justifier que  $M$  est inversible. Dans la suite de cette partie, on pose  $B = M^{-1}F$ . On définit par récurrence une suite de matrices colonnes  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  avec  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  quelconque et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = BX_k + M^{-1}Y$$

**Q31.** Montrer que  $X = BX + M^{-1}Y$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre quelconque de la matrice  $B$ . On note

$V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  un vecteur propre de  $B$  associé à cette valeur propre. Par convention, si  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est une

suite de nombres complexes alors :

$$\sum_{j=n+1}^n u_j = \sum_{j=1}^0 u_j = 0$$

**Q32.** Montrer que  $FV = \lambda MV$ . En déduire que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \lambda a_{i,i} v_i = - \left( \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} v_j \right)$$

**Q33.** Montrer qu'il existe  $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tel que  $|v_{i_0}| = \max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} |v_j|$  et  $v_{i_0} \neq 0$ . En déduire que :

$$|\lambda a_{i_0, i_0}| \leq \left( \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0, j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0, j}| \right).$$

**Q34.** En déduire que  $|\lambda| < 1$ , puis que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0$ . **Q35.** Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_k - X = B^k (X_0 - X)$$

et conclure.