

Epreuve de mathématiques

CCP 2023 PSI

Exercice

Fonctions de Bessel

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t) dt$$

Q1. Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R} .

Q2. Montrer que f est de classe C^2 sur \mathbb{R} et donner des expressions sous forme d'intégrales de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q3. Soit une fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x, t) = \cos(t) \sin(x \sin(t)).$$

Justifier l'existence de $\frac{\partial h}{\partial t}$, puis déterminer $\frac{\partial h}{\partial t}(x, t)$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

Q4. En déduire que f est solution de l'équation différentielle :

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

Q5. On suppose qu'il existe une solution de (E) développable en série entière notée $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Montrer que $a_1 = 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$$

Q6. En utilisant un théorème d'interversion série intégrale, montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et exprimer les coefficients du développement de f en fonction des termes de la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Q7. Déduire des questions précédentes que f est l'unique solution développable en série entière de (E) vérifiant $f(0) = \pi$.

Q8. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de W_n en fonction de n .

1 Premier problème. Marche aléatoire sur \mathbb{Z}

On considère une particule se déplaçant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial $t = 0$ est $k = 0$. A chaque instant $t \in \mathbb{N}^*$, elle se déplace aléatoirement de sa position $k = \mathbb{Z}$ à la position $k + 1$ ou $k - 1$.

Soit $p \in]0; 1[$. On définit sur un espace probabilisé (Ω, Σ, P) une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ et identiquement distribuées dont la loi est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_t = 1) = p \text{ et } P(X_t = -1) = 1 - p$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{t=1}^n X_t$.

Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_t modélise le déplacement de la particule à l'instant t . Si $X_t = 1$, la particule se déplace vers la droite. Si $X_t = -1$, la particule se déplace vers la gauche. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n modélise la position de la particule après n déplacements. On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

1.1 Un développement en série entière

Q9. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{N}$. Donner sans démonstration un développement en série entière de la fonction réelle $x \mapsto (1+x)^\alpha$ au voisinage de 0 en précisant son rayon de convergence.

Q10. En déduire que pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n$$

1.2 Probabilité de retour à l'origine

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = P(S_n = 0)$$

Q11. Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire $\frac{X_t+1}{2}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\sum_{t=1}^n \frac{X_t+1}{2}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Q12. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}} (p(1-p))^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q13. Déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$ selon les valeurs de p et interpréter le résultat.

1.3 Nombre de passages par l'origine

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note O_{2j} la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = 2j, 0$ sinon. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum_{j=0}^n O_{2j}$. On note $\mathbb{E}(T_n)$ l'espérance de la variable aléatoire T_n .

Dans cette partie, on souhaite déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Q14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que modélise la variable aléatoire T_n ?

Q15. Soit $j \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire O_{2j} . En déduire que :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^n \binom{2j}{j} (p(1-p))^j$$

Q16. On suppose dans cette question que $p \neq \frac{1}{2}$. En utilisant le résultat de la Q10, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$ et interpréter le résultat.

Q17. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$

2 Deuxième problème. Puissances de matrices et limites de suites de matrices

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On s'intéresse ici à la convergence de suites matricielles $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_k \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ avec $p = 1$ (matrices colonnes) ou $p = n$ (matrices carrées). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note alors $M_k = \left(m_{i,j}^{(k)} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$ ou plus simplement $M_k = \left(m_{i,j}^{(k)} \right)$.

On suppose que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ est muni d'une norme notée $\|\cdot\|$ indifféremment des valeurs de n et p . En particulier, si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, V est une matrice colonne assimilée à un vecteur de \mathbb{C}^n et on note $\|V\|$ sa norme.

On rappelle que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$;
2. la suite des normes $(\|M_k - A\|)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 ;
3. pour tout $(i, j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket$, la suite de nombres complexes $\left(m_{i,j}^{(k)} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ (convergence des coefficients de la matrice).

On s'intéresse en particulier à la suite des puissances itérées $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'une matrice donnée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2.1 Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on définit la matrice $M(a, b) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a & b & a \\ a & \cdots & a & a & b \end{pmatrix}$$

et on note $P_{a,b}$ le polynôme caractéristique de la matrice $M(a,b)$.

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on remarque que pour tous réels a et b ,

$$M(a,b) = bI_n + aM(1,0)$$

Q18. On suppose, dans cette question uniquement, que $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que dans ce cas $M(a,b)$ est diagonalisable.

Q19. Montrer que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de $M(a,b)$ et déterminer la valeur propre associée à V .

Q20. Montrer que $P_{1,0}(X) = (X - (n-1))(X+1)^{n-1}$.

Q21. On suppose que $a \neq 0$. Montrer que $P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\frac{X-b}{a}\right)$. En déduire l'ensemble des valeurs propres de $M(a,b)$ ainsi que leurs multiplicités. **Q22.** On définit le polynôme $Q_{a,b} \in \mathbb{C}[X]$ par $Q_{a,b}(X) = (X - (b-a))(X - (b + (n-1)a))$.

Montrer que $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$ et en déduire que $M(a,b)$ est diagonalisable (on distinguera les cas $a = 0$ et $a \neq 0$).

Q23. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \neq 0$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme $Q_{a,b}$ et en déduire une expression de $M(a,b)^k$ comme combinaison linéaire de $M(a,b)$ et de I_n .

Q24. Supposons que $|b-a| < 1$ et $|b + (n-1)a| < 1$. Déterminer la limite de la suite de matrices $(M(a,b)^k)_{k \in \mathbb{N}}$

2.2 Limite des puissances d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel \mathbb{C}^n muni d'une norme notée $\|\cdot\|$. On note sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit u un endomorphisme de \mathbb{C}^n vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \quad |\lambda| < 1$$

où $\text{Sp}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u . On note A la matrice de l'endomorphisme u dans la base \mathcal{B} .

L'objectif de cette partie est de montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$.

On suppose (sauf à la Q29) que $A = T$ où T est une matrice triangulaire supérieure :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Q25. Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u^k(e_1)\| = 0$ et en déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_1)$.

On suppose qu'il existe $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ tel que pour tout $j \in \llbracket 1; i \rrbracket$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_j) = 0$.

Q26. Montrer qu'il existe $x \in \text{Vect}(e_j)_{j \in \llbracket 1; i \rrbracket}$ tel que :

$$u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x.$$

En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)$$

Q27. Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0$. En déduire que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_{i+1}) = 0$.

Q28. Montrer alors que $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = 0$.

Q29. On ne suppose plus que A est triangulaire supérieure. Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$.

2.3 Application à la méthode de Gauss-Seide

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$$

On dit alors que A est une matrice à diagonale strictement dominante. On admet que dans ce cas A est inversible.

On définit ensuite $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la manière suivante : pour tout $(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$,

- si $i \geq j$, $m_{i,j} = a_{i,j}$ et $f_{i,j} = 0$
- si $i < j$, $m_{i,j} = 0$ et $f_{i,j} = -a_{i,j}$

Ainsi, $A = M - F$ où F est la partie triangulaire supérieure de diagonale nulle de $-A$ et où M est la partie triangulaire inférieure de A . Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On note $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'unique matrice colonne telle que :

$$AX = Y.$$

Le but de cette partie est de trouver une suite qui converge vers X .

Q30. Justifier que M est inversible. Dans la suite de cette partie, on pose $B = M^{-1}F$. On définit par récurrence une suite de matrices colonnes $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ quelconque et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = BX_k + M^{-1}Y$$

Q31. Montrer que $X = BX + M^{-1}Y$. Soit λ une valeur propre quelconque de la matrice B . On note

$V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de B associé à cette valeur propre. Par convention, si $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes alors :

$$\sum_{j=n+1}^n u_j = \sum_{j=1}^0 u_j = 0$$

Q32. Montrer que $FV = \lambda MV$. En déduire que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \lambda a_{i,i} v_i = - \left(\sum_{j=i+1}^n a_{i,j} v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} v_j \right)$$

Q33. Montrer qu'il existe $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $|v_{i_0}| = \max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} |v_j|$ et $v_{i_0} \neq 0$. En déduire que :

$$|\lambda a_{i_0, i_0}| \leq \left(\sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0, j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0, j}| \right).$$

Q34. En déduire que $|\lambda| < 1$, puis que $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0$. **Q35.** Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_k - X = B^k (X_0 - X)$$

et conclure.