

CCP - Mathématiques 1 MP 2023

Pandou Nguyễn

24 avril 2023

1 Exercice 1

1. On utilise la formule du produit matriciel $[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^n [A]_{i,k}[B]_{k,j}$.

```
def produit(A,B):
    n = len(A)
    C = []
    for i in range(n):
        L = []
        for j in range(n):
            x = 0
            for k in range(n):
                x = x + A[i][k]*B[k][j]
            L.append(x)
        C.append(L)
    return C
```

2. Un graphe est non orienté si, et seulement si, sa matrice d'adjacence est symétrique.

```
def oriente(A):
    n = len(A)
    res = False
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if A[i][j] != A[j][i]:
                res = True
    return res
```

3. En utilisant le résultat admis, la distance entre i vers j est le plus petit entier $p \geq 1$ tel que le coefficient (i, j) de A^p est non nul. L'hypothèse qu'un tel chemin existe permet au programme suivant de finir car la distance est bien définie.

```
def distance(A,i,j):
    p=1
    B=A
    while B[i][j]==0:
        B = produit(A,B)
        p=p+1
    return p
```

4. Revoir le SQL.
5. Revoir le SQL.

2 Exercice 2

6. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x - e^{-x}$ qui est une fonction continue strictement croissante comme somme de fonctions continues strictement croissantes. On a $f(0) = -1 < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel x tel que $f(x) = 0$, ie une unique solution de $e^{-x} = x$. (On sait même que cette solution est > 0).

7. La fonction f est différentiable sur \mathbb{R}^2 par théorèmes généraux de régularité. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y - e^{-x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 4y$$

Un point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ de f est un point tel que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_0 - 2y_0 - e^{-x_0} = 0 \\ x_0 = 2y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{-x_0} = x_0 \\ x_0 = 2y_0 \end{cases}$$

La première ligne admet une unique solution qui donne un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ et la deuxième ligne donne un unique $y_0 \in \mathbb{R}$.

Ainsi, f admet un unique point critique en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

8. On calcule la matrice hessienne de f :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + e^{-x} & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $4(2 + e^{-x}) - 4 = 4(1 + e^{-x}) > 0$, on en déduit donc que les deux valeurs propres de $H_f(x_0, y_0)$ sont de même signe et comme sa trace est $6 + e^{-x} > 0$, on en déduit que ces deux valeurs propres sont strictement positives.

On en déduit que f admet un extremum local en (x_0, y_0) , c'est un minimum.

3 Problème

3.1 Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

9. La fonction $f : x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On regarde :

- Au voisinage de 0^+ , on a $\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \sim x^{\alpha-1}$ qui est intégrable car $\alpha \in]0, 1[$, donc par comparaison, f est intégrable sur $]0, 1[$.
- Au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) \sim x^{\alpha-2}$ qui est intégrable en $+\infty$ car $\alpha \in]0, 1[$, donc par comparaison, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

10. Dans $J(\alpha)$, on fait le changement de variables $y = \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \int_0^1 \frac{y^{1-\alpha} dy}{1 + \frac{1}{y} y^2} \\ &= \int_0^1 \frac{y^{(1-\alpha)-1} dy}{1+y} \\ &= I(1-\alpha) \end{aligned}$$

11. Soit $x \in]0, 1[$, on calcule

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n+\alpha-1} \\ &= x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \\ &= \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \end{aligned}$$

Si $\sum f_n$ convergeait uniformément sur $]0, 1[$, alors (f_n) converge vers 0 uniformément. En effet, si on note $R_n = \sum_{k \geq n} f_k$, alors $f_n = R_n - R_{n+1}$, alors $\|f_n\|_\infty \leq \|R_n\|_\infty + \|R_{n+1}\|_\infty \rightarrow 0$. Mais (f_n) ne converge pas uniformément vers 0, en effet $\|f_n\|_\infty = 1$ qui ne converge pas vers 0.

12. S_n est une fonction continue sur $[0, 1]$ qui converge simplement vers $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ sur $]0, 1[$. On a :

$$\forall x \in]0, 1[, S_n(x) = x^{\alpha-1} \sum_{k=0}^n (-x)^k = x^{\alpha-1} \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x}$$

de sorte qu'on a la domination :

$$\forall x \in]0, 1[, |S_n(x)| \leq 2$$

Et donc, par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) dx = I(\alpha)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+\alpha-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k x^{k+\alpha-1} dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} \end{aligned}$$

13. On utilise le résultat la question 10. :

$$\begin{aligned} I(\alpha) + J(\alpha) &= I(\alpha) + I(1-\alpha) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n-\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \end{aligned}$$

Et d'autre part, par linéarité, on a

$$I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$$

14. On utilise la formule admise pour $x = 0$ et on a $1 = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right)$, d'où, par la question précédente,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Complément : On propose une courte preuve de la relation admise. On calcule les coefficients de Fourier de $x \mapsto \cos(\alpha x)$ qui est 2π -périodique :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\alpha x) \cos(nt) dt$$

et on pose $S_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$. On montrera ensuite que (S_n) converge normalement, puis que la limite est $x \mapsto \cos(\alpha x)$. A voir dans la V2.

3.2 Lien avec la fonction Gamma

15. Fixons $x > 0$, on pose $\varphi(t) = t^{x-1}e^{-t}$ pour $t \in]0, +\infty[$. On a :
- Au voisinage de 0^+ : $\varphi(t) \sim t^{x-1}$ qui est intégrable en 0 car $x > 0$ et donc φ est intégrable par comparaison.
 - Au voisinage de $+\infty$: par croissances comparées, on a $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc par comparaison, φ est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

16. Pour $x \geq 0$, on a pour $t > 0$, $\left| \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} e^{-xt} \right| \leq \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}$ qui est intégrable par la question 9.. Et donc, par comparaison, f_α est bien définie sur $[0, +\infty[$.

On note $\varphi(x, t) = \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}$ définie sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Pour chaque $x \geq 0, t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue. De même, pour chaque $t > 0, x \mapsto \varphi(x, t)$ est continue. On a la domination suivante :

$$\forall x \geq 0, \forall t > 0, |\varphi(x, t)| \leq \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}$$

qui est encore intégrable par la question 9., ainsi par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, f_α est continue sur $[0, +\infty[$.

17. On reprend la notation φ précédente et on fixe $\varepsilon > 0$. Pour chaque $t > 0$, la fonction $x \mapsto \varphi(x, t)$ est \mathcal{C}^1 sur $[\varepsilon, +\infty[$ et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = -\frac{t^\alpha}{t+1} e^{-xt}$$

Pour chaque $x \geq \varepsilon$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, on a la domination :

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-\varepsilon t}$$

La fonction $t \mapsto e^{-\varepsilon t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc, par le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, f_α est de classe \mathcal{C}^1 et :

$$f'_\alpha(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t} e^{-xt} dt$$

18. On reprend encore la notation φ de la question précédente. On a pour chaque $t > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x, t) = 0$. On utilise la même domination : $|\varphi(x, t)| \leq \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}$ qui est intégrable. On en déduit par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 0$$

19. Par le théorème de croissances comparées, on a $\frac{e^{-t}}{t^\alpha} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. En 0^+ , on a $\frac{e^{-t}}{t^\alpha} \sim \frac{1}{t^\alpha}$ qui est intégrable car $\alpha \in]0, 1[$, donc par comparaison, on a $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Ainsi, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt = 0$$

3.3 Vers la formule des compléments

20. On calcule :

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^{\alpha-1}}{t+1} + \frac{t^\alpha}{1+t} \right) e^{-xt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} (1+t) e^{-xt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-xt} dt \end{aligned}$$

On fait le changement de variables $u = xt$:

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} e^{-u} \frac{du}{dx} = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

21. La fonction g_α est dérivable sur $]0, +\infty[$ car $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$:

$$g'_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) e^x \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt - \frac{e^{-x}}{x^\alpha} \right) = g_\alpha(x) - \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

On en déduit que g_α est bien une solution particulière de $y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

On a de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 0$ d'après la question 18.. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et $\frac{e^{-t}}{t^\alpha} = o(e^{-t})$ et donc, on peut intégrer les restes :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt = o \left(\int_x^{+\infty} e^{-t} dt \right) = o(e^{-x})$$

Et donc, on a

$$g_\alpha(x) = o(1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Et donc, on en déduit que

$$\forall x > 0, f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$$

22. On a f_α est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, g_α se prolonge par continuité en 0 et on a $f_\alpha(0) = g_\alpha(0)$, ce qui donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$$

23. D'après la question 14., on a $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} &= \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt \\ &= \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} t^{(1-\alpha)-1} e^{-t} dt \\ &= \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) \end{aligned}$$

24. On fait le changement de variables $u = t^2$ et on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Dans la formule des compléments, on fait $\alpha = \frac{1}{2}$ et on trouve

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \pi$$

On en déduit donc que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$