CCP - Mathématiques 1 MP/MPI 2023

Pandou

25 avril 2023

1 Exercice 1 (MP)

1. On utilise la formule du produit matriciel $[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,j}$.

```
def produit(A,B):
    n = len(A)
    C = []
    for i in range(n):
        L = []
        for j in range(n):
            x = 0
            for k in range(n):
                x = x + A[i][k]*B[k][j]
            L.append(x)
        C.append(L)
    return C
```

2. Un graphe est non orienté si, et seulement si, sa matrice d'adjacence est symétrique.

```
def oriente(A):
    n = len(A)
    res = False
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if A[i][j] != A[j][i]:
                res = True
    return res
```

3. En utilisant le résultat admis, la distance entre i vers j est le plus petit entier $p \geqslant 1$ tel que le coefficient (i, j) de A^p est non nul. L'hypothèse qu'un tel chemin existe permet au programme suivant de fini car la distance est bien définie.

```
def distance(A,i,j):
    p=1
    B=A
    while B[i][j]==0:
        B = produit(A,B)
        p=p+1
    return p
```

4. Revoir le SQL. Voici ce qu'on m'a proposé (à vérifier) :

```
SELECT id FROM CLIENTS WHERE ville = ''TOULOUSE''
```

5. Revoir le SQL. Voici ce qu'on m'a proposé (à vérifier) :

```
SELECT C.email FROM CLIENTS as C INNER JOIN PARTENAIRES as P on
C.id = P.id_client WHERE P.partenaire=''SCEI''
```

1 Exercice 1 (MPI)

1. Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
   - Si $N(A)=0$, alors $\forall i\in\mathbb{N}, \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|=0$ qui est une somme de réels positifs, donc $\forall i,j\in\mathbb{N}, a_{i,j}=0$, donc $A=0$.
   - On a
   $$N(\lambda A)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|\lambda a_{i,j}|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda|\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|=|\lambda|N(A)$$
   - Soit $i\in[\![1,n]\!]$, on a
   $$\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|+\sum_{j=1}^{n}|b_{i,j}|\leqslant N(A)+N(B)$$
   Et donc, en prenant le maximum sur les $i\in[\![1,n]\!]$, on a alors $N(A+B)\leqslant N(A)+N(B)$.

   Ainsi, N est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in S$ et $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in M_n(\mathbb{R})$, alors, comme $|x_i|\leqslant 1$, on a, pour $i\in[\![1,n]\!]$:
   $$\begin{aligned}\big|[AX]_i\big| &= \left|\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}x_k\right|\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}x_k|\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|\\ &\leqslant N(A)\end{aligned}$$
   Et on prend le maximum sur $i\in[\![1,n]\!]$ et on trouve :
   $$\|AX\|_\infty\leqslant N(A)$$
   $\{\|AX\|_\infty, X\in S\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui est majorée par $N(A)$, elle admet alors une borne supérieure.
3. Soit $X\in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A\in M_n(\mathbb{R})$. Si $X=0$, c'est immédiat. Sinon, $Y=\dfrac{X}{\|X\|_\infty}\in S$, alors on a par définition
   $$\|AY\|_\infty=\frac{1}{\|X\|_\infty}\|AX\|_\infty\leqslant |\!|\!|A|\!|\!| \qquad \text{ce qui se réécrit} \qquad \|AX\|_\infty\leqslant |\!|\!|A|\!|\!|\|X\|_\infty$$
4. D'après la question 2., en prenant la borne supérieure sur les $X\in S$, on trouve déjà
   $$\forall A\in M_n(\mathbb{R}), |\!|\!|A|\!|\!|\leqslant N(A)$$
   Soit $i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $N(A)=\sum_{j=1}^{n}|a_{i_0,j}|$. On considère le vecteur $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ défini par :
   $$x_j=\begin{cases}\dfrac{a_{i_0,j}}{|a_{i_0,j}|} & \text{si } a_{i_0,j}\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On suppose dans la suite que $A \neq 0$ (car pour $A = 0$, l'égalité est triviale) et donc, on a $x \in S$ et

$$\begin{array}{rcl} \|Ax\|_\infty & = & \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left| \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n, a_{i_0,j}\neq 0} a_{i_0,j} x_j \right| \\ & = & \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left| \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n, a_{i_0,j}\neq 0} |a_{i_0,j}| \right| \\ & = & \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| \\ & = & N(A) \end{array}$$

Comme $x \in S$, on en déduit que

$$|||A||| \geqslant \|Ax\|_\infty = N(A)$$

D'où l'égalité

$$|||A||| = N(A)$$

5. On a

$$|||A||| = N(A) = \max\big(2+0+1, 3+2+3, 5+0+1\big) = \max(3, 8, 6) = 8$$

2 Exercice 2

6. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x - e^{-x}$ qui est une fonction continue strictement croissante comme somme de fonctions continues strictement croissantes. On a $f(0) = -1 < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel x tel que $f(x) = 0$, ie une unique solution de $e^{-x} = x$. (On sait même que cette solution est > 0).
7. La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ par théorèmes généraux de régularité. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y - e^{-x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x + 4y$$

Un point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ de f est un point tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$. On a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x_0 - 2y_0 - e^{-x_0} & = & 0 \\ x_0 & = & 2y_0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} e^{-x_0} & = & x_0 \\ x_0 & = & 2y_0 \end{array}\right.$$

La première ligne admet une unique solution qui donne un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ et la deuxième ligne donne un unique $y_0 \in \mathbb{R}$.
Ainsi, f admet un unique point critique en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
8. On calcule la matrice hessienne de f :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+e^{-x} & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $4(2+e^{-x}) - 4 = 4(1+e^{-x}) > 0$, on en déduit donc que les deux valeurs propres de $H_f(x_0, y_0)$ sont de même signe et comme sa trace est $6 + e^{-x} > 0$, on en déduit que ces deux valeurs propres sont strictement positives.
On en déduit que f admet un extremum local en (x_0, y_0), c'est un minimum.

3 Problème

3.1 Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

9. La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue sur $]0,+\infty[$. On regarde :
   - Au voisinage de 0^+, on a $\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} \sim x^{\alpha-1}$ qui est intégrable car $\alpha \in]0,1[$, donc par comparaison, f est intégrable sur $]0,1]$.
   - Au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) \sim x^{\alpha-2}$ qui est intégrable en $+\infty$ car $\alpha \in]0,1[$, donc par comparaison, f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

10. Dans $J(\alpha)$, on fait le changement de variables $y = \dfrac{1}{x}$:

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \int_0^1 \frac{y^{1-\alpha}}{1+\frac{1}{y}} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} \\ &= \int_0^1 \frac{y^{(1-\alpha)-1}}{1+y} \mathrm{d}y \\ &= I(1-\alpha) \end{aligned}$$

11. Soit $x \in]0,1[$, on calcule

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n+\alpha-1} \\ &= x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \\ &= \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \end{aligned}$$

Si $\sum f_n$ convergeait uniformément sur $]0,1[$, alors (f_n) converge vers 0 uniformément. En effet, si on note $R_n = \sum_{k \geqslant n} f_k$, alors $f_n = R_n - R_{n+1}$, alors $\|f_n\|_\infty \leqslant \|R_n\|_\infty + \|R_{n+1}\|_\infty \longrightarrow 0$. Mais (f_n) ne converge pas uniformément vers 0, en effet $\|f_n\|_\infty = 1$ qui ne converge pas vers 0.

12. S_n est une fonction continue sur $[0,1]$ qui converge simplement vers $x \longmapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ sur $]0,1[$. On a :

$$\forall x \in]0,1[, S_n(x) = x^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n} (-x)^k = x^{\alpha-1} \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$$

de sorte qu'on a la domination :

$$\forall x \in]0,1[, \left|S_n(x)\right| \leqslant 2$$

Et donc, par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} S_n(x)\mathrm{d}x = I(\alpha)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k x^{k+\alpha-1} \mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} \end{aligned}$$

13. On utilise le résultat la question 10. :

$$\begin{aligned} I(\alpha)+J(\alpha) &= I(\alpha)+I(1-\alpha) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\alpha}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\alpha}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n+\alpha}-\frac{1}{n-\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2} \end{aligned}$$

Et d'autre part, par linéarité, on a

$$I(\alpha)+J(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}$$

14. On utilise la formule admise pour $x=0$ et on a $1=\dfrac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\right)$, d'où, par la question précédente,

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Complément : On propose une courte preuve de la relation admise. D'ailleurs qu'a priori la relation n'est vrai que sur $]-\pi,\pi[$. Celle-ci demande quelques connaissances en séries de Fourier. On considère la fonction $f: x\in]-\pi,\pi]\longmapsto\cos(\alpha x)$.

$$\begin{aligned} \forall n\geqslant 1, a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\alpha t)\cos(nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\left((n-\alpha)t\right)+\cos\left((n+\alpha)t\right)\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\left((n-\alpha)\pi\right)}{n-\alpha}+\frac{\sin\left((n+\alpha)\pi\right)}{n+\alpha}\right] \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi}2\alpha\frac{\sin(\pi\alpha)}{\alpha^2-n^2} \end{aligned}$$

et,

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha\pi}\sin(\alpha\pi)$$

et on pose $S_N(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{N}a_n\cos(nx)$. De sorte que

$$S_N(x)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}+\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{2\alpha\sin(\pi\alpha)}{\pi(\alpha^2-n^2)}\cos(nx)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{2\alpha\cos(nx)}{\alpha^2-n^2}\right)$$

Il est clair que $(S_N)_{N\geqslant 1}$ converge normalement vers une limite. On admettra que cette limite est f [1]

3.2 Lien avec la fonction Gamma

15. Fixons $x>0$, on pose $\varphi(t)=t^{x-1}e^{-t}$ pour $t\in]0,+\infty[$. On a :
    - Au voisinage de 0^+ : $\varphi(t)\sim t^{x-1}$ qui est intégrable en 0 car $x>0$ et donc φ est intégrable par comparaison.

1. Ce résultat est donné par le théorème de Dirichlet.

- Au voisinage de $+\infty$: par croissances comparées, on a $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc par comparaison, φ est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, φ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et donc Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

16. Pour $x \geqslant 0$, on a pour $t > 0$, $\left|\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}e^{-xt}\right| \leqslant \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}$ qui est intégrable par la question 9.. Et donc, par comparaison, f_α est bien définie sur $[0,+\infty[$.

On note $\varphi(x,t) = \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-xt}$ définie sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Pour chaque $x \geqslant 0, t \longmapsto \varphi(x,t)$ est continue. De même, pour chaque $t > 0, x \longmapsto \varphi(x,t)$ est continue. On a la domination suivante :

$$\forall x \geqslant 0, \forall t > 0, \left|\varphi(x,t)\right| \leqslant \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}$$

qui est encore intégrable par la question 9., ainsi par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, f_α est continue sur $[0,+\infty[$.

17. On reprend la notation φ précédente et on fixe $\varepsilon > 0$. Pour chaque $t > 0$, la fonction $x \longmapsto \varphi(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon,+\infty[$ et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -\frac{t^\alpha}{t+1}e^{-xt}$$

Pour chaque $x \geqslant \varepsilon$, la fonction $t \longmapsto \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, on a la domination :

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-\varepsilon t}$$

La fonction $t \longmapsto e^{-\varepsilon t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et donc, par le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$f_\alpha'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t}e^{-xt}\mathrm{d}t$$

18. On reprend encore la notation φ de la question précédente. On a popur chaque $t > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x,t) = 0$. On utilise la même domination : $\left|\varphi(x,t)\right| \leqslant \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}$ qui est intégrable. On en déduit par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0$$

19. Par le théorème de croissances comparées, on a $\frac{e^{-t}}{t^\alpha} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $t \longmapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. En 0^+, on a $\frac{e^{-t}}{t^\alpha} \sim \frac{1}{t^\alpha}$ qui est intégrable car $\alpha \in]0,1[$, donc par comparaison, on a $t \longmapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. Ainsi, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t = 0$$

3.3 Vers la formule des compléments

20. On calcule :

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) - f_\alpha'(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^{\alpha-1}}{t+1} + \frac{t^\alpha}{1+t}\right)e^{-xt}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}(1+t)e^{-xt}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-xt}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On fait le changement de variables $u = xt$:

$$f_\alpha(x) - f_\alpha'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}}e^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

21. La fonction g_α est dérivable sur $]0,+\infty[$ car $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$:

$$g'_\alpha(x) = \Gamma(\alpha)e^x \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t - \frac{e^{-x}}{x^\alpha}\right) = g_\alpha(x) - \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

On en déduit que g_α est bien une solution particulière de $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

On a de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0$ d'après la question 18.. La fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et $\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} = o\left(e^{-t}\right)$ et donc, on peut intégrer les restes :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t = o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t\right) = o(e^{-x})$$

Et donc, on a

$$g_\alpha(x) = o(1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Et donc, on en déduit que

$$\forall x > 0, f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$$

22. On a f_α est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, g_α se prolonge par continuité en 0 et on a $f_\alpha(0) = g_\alpha(0)$, ce qui donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\mathrm{d}t = \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$

23. D'après la question 14., on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} &= \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t \\ &= \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} t^{(1-\alpha)-1}e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\end{aligned}$$

24. On fait le changement de variables $u = t^2$ et on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Dans la formule des compléments, on fait $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et on trouve

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \pi$$

On en déduit donc que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$