CCP - Mathématiques 1 PC 2023

Pandou

26 avril 2023

1 Exercice 1 - Endomorphisme cyclique

1.1 Étude d'un premier exemple

1. On a $f(v) = (4,1)$ et $\big(v, f(v)\big)$ sont deux vecteurs non colinéaires, donc forment une famille libre de $\mathbb{R}^2$, donc une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, f est cyclique.
2. La matrice canoniquement associée à f est $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, dont le polynôme caractéristique est $X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$. Ainsi, les valeurs propres de f sont 2 et 3.
On résoud les systèmes :
$$f(x,y) = 2(x,y) \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 4x - 2y & = & 2x \\ x + y & = & 2y \end{array} \right. \iff x = y$$
Ainsi, une base de l'espace propre associé à la valeur propre 2 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$$f(x,y) = 3(x,y) \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 4x - 2y & = & 3x \\ x + y & = & 3y \end{array} \right. \iff x = 2y$$
Ainsi, une base de l'espace propre associé à la valeur propre 3 est $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Il suffit de prendre $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'après la question précédente, $f(w)$ et w sont colinéaires, donc ne forment pas une base de $\mathbb{R}^2$.
Plus généralement, on pouvait prendre n'importe quel vecteur non nul de l'espace propre associé à la valeur propre 2 ou 3.

1.2 Étude d'un deuxième exemple

4. On calcule :
$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = M + 2I_2$$
ce qui donne la relation recherchée.
5. Le polynôme $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ est annulateur de M et est scindé à racines simples, donc M est diagonalisable et ses valeurs propres sont parmi les racines de ce polynôme.
Si -1 était seule valeur propre, alors M serait semblable à $-I_n$, donc égale à $-I_n$, ce qui n'est pas. De même, si 2 était l'unique valeur propre, on aurait $M = 2I_n$.
Ainsi, les valeurs propres de M sont -1 et 2.
6. g n'est pas cyclique. En effet, si $v \in E$, alors $g^2(v) = g(v) + 2v$, donc la famille $\big(v, g(v), g^2(v)\big)$ est liée, donc n'est jamais une base de $\mathbb{R}^3$.

1.3 Étude d'un troisième exemple

7. Δ est clairement linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. Si $k \in [\![0,n]\!]$, on a
$$\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} X^\ell \in \mathbb{R}_n[X]$$
Par linéarité, on en déduit donc que Δ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
8. Voir la question précédente.
9. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est non constant, on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \geqslant 1$ et $a_n \neq 0$. Alors,
$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta(X^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} X^\ell$$
Et son coefficient dominant est $a_n X^{n-1}$, donc $\deg\big(\Delta(P)\big) = \deg(P) - 1$.
10. D'après la question précédente, la famille $\big(\Delta^k(X^n)\big)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est échelonnée en degré, donc libre dans $\mathbb{R}_n[X]$. Étant de cardinal $n+1 = \dim\big(\mathbb{R}_n[X]\big)$, on en déduit qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et donc Δ est cyclique.

1.4 Cas d'un endomorphisme diagonalisable

11. On montre cette propriété par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$, on a $h(v) = \alpha_1 h(v_1) + ... + \alpha_n h(v_n) = \alpha_1\lambda_1 v_1 + ... + \alpha_n \lambda_n v_n$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $h^p(v) = \alpha_1\lambda_1^p v_1 + ... + \alpha_n\lambda_n^p v_n$. Alors,
$$\begin{aligned} h^{p+1}(v) &= h \circ h^p(v) \\ &= h(\alpha_1\lambda_1^p v_1 + ... + \alpha_n\lambda_n^p v_n) \\ &= \alpha_1\lambda_1^{p+1} v_1 + ... + \alpha_n\lambda_n^{p+1} v_n \end{aligned}$$
ce qui est ce qu'on voulait montrer.
12. On calcule, par multilinéarité du déterminant et en reconnaissant un déterminant de Vandermonde :
$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\lambda_1 & \dots & \alpha_1\lambda_1^{n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_2\lambda_2 & & \alpha_2\lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n\lambda_n & & \alpha_n\lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \alpha_1...\alpha_n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \alpha_1...\alpha_n \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \end{aligned}$$
13. Supposons que h admette n valeurs propres distinctes, on pose alors $v = v_1 + ... + v_n$ de sorte que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$ et donc $\big(v, h(v), ..., h^{n-1}(v)\big)$ est une base de E.
Réciproquement, si h est cyclique, alors il existe $v \in E$ tel que $\big(v, h(v), ..., h^{n-1}(v)\big)$ est une base de E, ie pour lequel $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$ et donc, tous les λ_i sont distincts (et en plus tous les coefficients de v sont non nuls dans la base $(v_1, ..., v_n)$).

2 Exercice 2 - La fonction dilogarithme

2.1 Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

14. Si $t > 0$, on a $e^t > 1$ et donc pour tout $x \leqslant 1$, $e^t - x > 0$ et donc f est bien définie sur $]0, +\infty] \times] - \infty, 1]$ comme quotient défini de fonctions.

15. On a $f(t,1) = \dfrac{t}{e^t - 1}$, donc $t \longmapsto f(t,1)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
   - Au voisinage de 0^+, on a $e^t - 1 \sim t$ et donc $f(t,1) \longrightarrow 1$. La fonction $t \longmapsto f(t,1)$ se prolonge donc par continuité en 0 par la valeur 1, donc y est intégrable.
   - Au voisinage de $+\infty$, $f(t,1) \sim te^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées. Donc, $t \longmapsto f(t,1)$ est intégrable par comparaison.

   On en déduit alors que $t \longmapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
16. Comme $x \leqslant 1$, on a $\forall t > 0, 0 < f(t,x) \leqslant f(t,1)$. Donc, par comparaison, $t \longmapsto f(t,x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
17. Il s'agit de montrer que $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}t$ est continue sur $]-\infty, 1]$. Pour chaque $t > 0$, $x \longmapsto f(t,x)$ est continue sur $]-\infty, 1]$.
   Pour $x \leqslant 1, t \longmapsto f(t,x)$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$. De plus, on a la domination suivante :
$$\forall x \leqslant 1, \forall t > 0, 0 < f(t,x) \leqslant f(t,1)$$
   et $t \longmapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 15.. Le théorème de continuité des intégrales à paramètres s'applique donc et L est continue sur $]-\infty, 1]$.

2.2 Développement en série entière

18. La fonction s_n est continue sur $]0, +\infty[$.
   - Au voisinage de 0, on a $s_n(t) \longrightarrow 0$, donc s_n est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0, donc y est intégrable.
   - Au voisinage de $+\infty$, on a $s_n(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées. Comme s_n est positive, on en déduit par comparaison que s_n est intégrable en $+\infty$.

   Ainsi, s_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.

   Soit $M > 0$, on fait une intégration par parties :
$$\int_0^M te^{-(n+1)t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{te^{-(n+1)t}}{n+1}\right]_0^M + \int_0^M \frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\mathrm{d}t$$
   L'égalité passe à la limite quand $M \longrightarrow +\infty$ en :
$$\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}$$
   On en déduit finalement que
$$\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}$$
19. Soit $t > 0$, on a $s_n(t) = t(xe^{-t})^{n+1}$ et $|xe^{-t}| < 1$, donc $\sum s_n(t)$ converge (critère des séries géométriques). D'où, la convergence simple de $\sum s_n$ sur $]0, +\infty[$. De plus, on a
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} te^{-t}(xe^{-t})^n \\ &= \frac{te^{-t}}{1 - xe^{-t}} \\ &= \frac{t}{e^t - x} = f(t,x) \end{aligned}$$

20. Comme $|x| \leqslant 1$, on a $\left|\dfrac{x^n}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et donc par comparaison, $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$ converge absolument, donc converge.
On calcule formellement sans justifier l'interversion en utilisant les questions 18. et 19. :

$$\begin{aligned} L(x) &= x\int_0^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}t \\ &= x\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2} \end{aligned}$$

Justifions l'interversion, il s'agit de montrer que la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |xs_n(t)|\mathrm{d}t$ converge, or, on a

$$\int_0^{+\infty} |xs_n(t)|\mathrm{d}t = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}$$

et $\sum \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}$ converge. L'interversion est donc justifiée.

21. Soit $x \in [-1,1]$, on calcule :

$$\begin{aligned} L(x)+L(-x) &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n+(-x)^n}{n^2} \\ &= \sum_{n\geqslant 1,\ n \text{ pair}}\frac{2x^n}{n^2} \\ &= \sum_{k\geqslant 1}\frac{2x^{2k}}{(2k)^2} \\ &= \frac{1}{2}L(x^2) \end{aligned}$$

22. D'après l'égalité admise, on a $L(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. De plus, d'après la question précédente, on a

$$L(-1) = \frac{1}{2}L(1) - L(1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}$$

2.3 Une autre propriété

23. La série dérivée de L : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$ converge normalement sur tout segment $[-a,a]$ pour $a<1$. Ainsi, L est dérivable sur tout segment $[-a,a]$ avec $a<1$, donc sur $]-1,1($ et

$$L'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$$

et si $x \neq 0$, on reconnaît une série du logarithme et pour $x=0$, on trouve 1, d'où si $x \neq 0$:

$$L'(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

24. La fonction h est dérivable sur $]0,1[$ par les théorèmes généraux de régularité des fonctions et :

$$\begin{array}{rcl}\forall x \in]0,1[, h'(x) & = & L'(x) - L'(1-x) + \dfrac{\ln(1-x)}{x} - \dfrac{\ln(x)}{1-x} \\ & = & -\dfrac{\ln(1-x)}{x} + \dfrac{\ln(x)}{1-x} + \dfrac{\ln(1-x)}{x} - \dfrac{\ln(x)}{1-x} \\ & = & 0\end{array}$$

Et donc, h est constante sur $]0,1[$.

25. Dans la définition de h, en prenant h constante, on fait tendre x vers 1. Il s'agit donc d'évaluer $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x)\ln(1-x)$. On écrit $h = 1-x$, alors

$$\begin{array}{rcl}\ln(x)\ln(1-x) & = & \ln(1-h)\ln(h) \\ & \sim & -h\ln(h) \\ & \longrightarrow 0 & \end{array}$$

Ainsi, l'égalité dans la définition de h passe à la limite quand x tend vers 1 en :

$$h(x) = L(1) + L(0) = L(1)$$

On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t - 1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - \frac{1}{2}}\mathrm{d}t = L\left(\frac{1}{2}\right)$$

On a alors avec la définition de h et ce qu'on vient de montrer :

$$L(1) = 2L\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(2)^2$$

D'où,

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t - 1}\mathrm{d}t & = & \dfrac{1}{2}\left(L(1) - \ln(2)^2\right) \\ & = & \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{\ln(2)^2}{2}\end{array}$$

3 Exercice 3 - Un jeu de société

3.1 Préliminaires

3.1.1 Modélisation

26. X_n est l'entier de $[\![0, M-1]\!]$ généré aléatoirement et uniformément par l'ordinateur au n-ème tour de jeu. S_n est la position du pion à la fin du n-ième tour.
27. La variable T représente le premier instant où le pion atteint ou dépasse la case A.

3.1.2 Calcul de la somme d'une série entière

28. f est $\mathcal{C}^\infty$, car est développable en série entière sur $]-1,1[$. On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $\forall x \in]-1,1[, f^{(p)}(x) = \dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}}$.

Si $p = 0$, on a pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \dfrac{1}{1-x} = f(x)$. OK.

Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose que $\forall x \in]-1,1[, f^{(p)}(x) = \dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}}$. Alors, en fixant $x \in]-1,1[$,

$$\begin{array}{rcl}f^{(p+1)}(x) & = & (f^{(p)})'(x) \\ & = & \dfrac{p!(p+1)}{(1-x)^{p+2}} \\ & = & \dfrac{(p+1)!}{(1-x)^{p+2}}\end{array}$$

ce qui était la formule désirée.

29. On utilise le critère de d'Alembert :

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n+1}{p}}{\binom{n}{p}} &= \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} \times \frac{p!(n-p)!}{n!}\\ &= \frac{n+1}{n+1-p} \longrightarrow 1\end{aligned}$$

Donc, d'après le critère de d'Alembert pour les séries entières, $\sum_{n \geqslant p} \binom{n}{p} x^n$ a pour rayon $\frac{1}{1} = 1$.

30. Fixons $x \in]-1,1[$. On écrit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, de sorte que si $p \in \mathbb{N}$, alors

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)...(n-p+1)x^{n-p} = \frac{1}{x^p} \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} x^n$$

On en déduit alors que

$$\frac{x^p}{(1-x)^{p+1}} = \frac{x^p f^{(p)}(x)}{p!} = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n$$

ce qui est la relation voulue.

3.2 Étude d'un premier cas

3.2.1 Loi des variables aléatoires S_n et T

31. On a $\mathbb{P}(X_k = 0) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_k = 1)$, de sorte que X_k suit une loi de Bernoulli de paramètres $\frac{1}{2}$. Par hypothèse, les (X_k) sont indépendants deux à deux, donc leur somme S_n suit une loi binomiale de paramètres $\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
32. Comme $X_k \in \{0,1\}$, on a $S_n \leqslant n$ et donc $T \in [\![A, +\infty]\!]$.
33. On a $(T = k) = \big((S_{k-1} = A-1) \cap (X_k = 1)\big)$, donc, par inidépendance de X_k et S_{k-1}, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T = k) &= \mathbb{P}(S_{k-1} = A-1)\mathbb{P}(X_k = 1)\\ &= \binom{k-1}{A-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{A-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1-(A-1)} \frac{1}{2}\\ &= \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}\end{aligned}$$

34. On calcule l'événement complémentaire : $(T \neq 0) = \bigcup_{k \geqslant A} (T = k)$. Puisque le jeu s'arrête quand le pion atteint ou dépasse le case A, cette union est disjointe et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \neq 0) &= \sum_{k \geqslant A} \mathbb{P}(T = k)\\ &= \sum_{k \geqslant A} \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}\\ &= \sum_{k \geqslant A-1} \binom{k}{A-1} \frac{1}{2^{k+1}}\\ &= \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{A-1}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^A}\\ &= 1\end{aligned}$$

où on a appliqué la formule de la question 30. pour $p = A-1$ et $x = \frac{1}{2}$.

On en déduit donc que $\mathbb{P}(T = 0) = 0$.

3.2.2 Espérance de la variable aléatoire T

35. On a $\mathbb{P}(T=k)x^k = \binom{k-1}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^k$. Or, comme $\sum_{n \geqslant p} \binom{n}{p}$ a pour rayon 1, on en déduit que G_T a pour rayon 2 et alors on a encore en appliquant la formule de la question 30. :

$$\begin{aligned} G_T(x) &= \sum_{k \geqslant A} \binom{k-1}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k \geqslant A-1} \binom{k}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+1} \\ &= \frac{x}{2}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{A-1}}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^A} \\ &= \left(\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}\right)^A \\ &= \left(\frac{x}{2-x}\right)^A \end{aligned}$$

36. Le nombre moyen de tours de jeu s'interprète comme l'espérance de T, or on a

$$\mathbb{E}(T) = G_T'(1)$$

or,

$$\forall x \in]-2,2[, G_T'(x) = A\frac{2-x+x}{(2-x)^2}\left(\frac{x}{2-x}\right)^{A-1} = \frac{A}{(2-x)^2}\left(\frac{x}{2-x}\right)^{A-1}$$

D'où,

$$\mathbb{E}(T) = A$$

3.3 Étude d'un second cas

3.3.1 Calcul de la probabilité $\mathbb{P}(S_n \leqslant k)$

37. Soit $k \in [\![0, A-1]\!]$, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant k) = \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(S_n \leqslant k-\ell)\mathbb{P}(X_{n+1}=\ell) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(S_n \leqslant k-\ell)$$

38. Si $n=1$, soit $k \in [\![0, A-1]\!]$, on a $\mathbb{P}(S_1 \leqslant k) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant k) = \frac{k+1}{M} = \frac{1}{M^1}\binom{1+k}{k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que pour tout $k \in [\![0, A-1]\!], \mathbb{P}(S_n \leqslant k) = \frac{1}{M^n}\binom{n+k}{n}$. Alors, râce à la question précédente, on a pour $k \in [\![0, A-1]\!]$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant k) &= \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(S_n \leqslant k-\ell) \\ &= \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{M^n}\binom{n+k-\ell}{n} \\ &= \frac{1}{M^{n+1}}\binom{n+1+k}{n+1} \end{aligned}$$

grâce à la formule admise. C'était la relation qu'il fallait trouver pour conclure la récurrence.

3.3.2 Espérance de la variable aléatoire T

39. On a $(T > n) = (S_n < A)$ par définition de T. Ainsi, on s'intéresse à la série de terme général $\big(\mathbb{P}(S_n < A)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n < A) &= \mathbb{P}(S_n \leqslant A-1) \\ &= \frac{1}{M^n}\binom{n+A-1}{n} \end{aligned}$$

On utilise la formule $\displaystyle\binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}$ de sorte que

$$\mathbb{P}(S_n < A) = \frac{1}{M^n}\binom{n+A-1}{A-1}$$

Et comme $M \geqslant 2$, on a $\dfrac{1}{M} \leqslant \dfrac{1}{2}$, de sorte que $\dfrac{1}{M}$ est dans le disque de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\binom{n+A-1}{A-1}x^n$, ainsi $\sum \mathbb{P}(S_n < A)$ converge et donc T admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(S_n < A) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{n+A-1}{A-1}\frac{1}{M^n} \\ &= \sum_{n\geqslant A-1} \binom{n}{A-1}\frac{1}{M^{n-(A-1)}} \\ &= M^{A-1}\sum_{n\geqslant A-1} \binom{n}{A-1}\frac{1}{M^n} \\ &= M^{A-1}\frac{\frac{1}{M^{A-1}}}{\left(1-\frac{1}{M}\right)^A} \\ &= \left(\frac{M}{M-1}\right)^A \end{aligned}$$

Commentaire : Quand $M \longrightarrow +\infty$, il faut en moyenne attendre 1 tour pour que le pion dépasse A. C'est intuitif, car dans ce cas, le pion a la possibilité d'avancer d'un grand nombre $M \geqslant A$ de cases et donc de dépasser A du premier coup.