# CCP - Mathématiques 1 PSI 2023

Pandou

25 avril 2023

## 1 Exercice : Fonction de Bessel

1. Fixons $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto \cos\big(x\sin(t)\big)\mathrm{d}t$ est continue sur $[0,\pi]$, donc y est intégrable. Ainsi, $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. On note $\varphi(x,t) = \cos\big(x\sin(t)\big)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,\pi]$. Alors, pour chaque $t \in [0,\pi]$, la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\sin\big(x\sin(t)\big) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) = -\sin^2(t)\cos\big(x\sin(t)\big)$$

   Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, chacune des fonctions $t \longmapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)$ et $t \longmapsto \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $[0,\pi]$.
   On a les dominations suivantes :

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant 1$$

   Donc, par le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, on en déduit que $f$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = -\int_0^\pi \sin(t)\sin\big(x\sin(t)\big)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad f''(x) = -\int_0^\pi \sin^2(t)\cos\big(x\sin(t)\big)\mathrm{d}t$$

3. Fixons $x \in \mathbb{R}$, alors la fonction $t \longmapsto h(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par les théorèmes généraux sur les fonctions dérivables. Et donc, $\dfrac{\partial h}{\partial t}$ existe bien et :

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = -\sin(t)\sin\big(x\sin(t)\big) + x\cos^2(t)\cos\big(x\sin(t)\big)$$

4. On calcule :

$$\begin{aligned}
xf''(x) + f'(x) + xf(x) &= -x\int_0^\pi \sin^2(t)\cos\big(x\sin(t)\big)\mathrm{d}t - \int_0^\pi \sin(t)\sin\big(x\sin(t)\big)\mathrm{d}t + x\int_0^\pi \cos\big(x\sin(t)\big)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \Big[x\cos^2(t)\cos\big(x\sin(t)\big) - \sin(t)\sin\big(x\sin(t)\big)\Big]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t \\
&= h(x,\pi) - h(x,0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

5. On calcule :

$$y'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)a_{n+1}x^n \qquad \text{et} \qquad y''(x) = \sum_{n\geqslant 1} n(n+1)a_{n+1}x^{n-1}$$

   De sorte qu'on ait :

$$xy''(x) + y'(x) = xy(x) = a_1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \big((n+2)^2 a_{n+2} + a_n\big)x^{n+1} = 0$$

Et donc, par identification des coefficients d'un développement en série entière, on a

$$a_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, (n+2)^2 a_{n+2} + a_n = 0$$

ce qui donne

$$\forall n \geqslant 2, a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$$

6. Formellement, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\pi \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{x^{2n}\sin^{2n}(t)}{(2n)!} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^\pi \sin^{2n}(t) \mathrm{d}t x^{2n} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n)!} W_n x^{2n} \end{aligned}$$

Pour justifier l'interversion, il s'agit de montrer que la série de terme général $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x^{2n}}{(2n)!}\left|\sin^{2n}(t)\right|\mathrm{d}t$ converge. Or, on a

$$\int_0^\pi \frac{x^{2n}}{(2n)!}\left|\sin^{2n}(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \pi\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Et $\displaystyle\sum \pi \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge (vers $\pi\cos(x)$), donc par comparaison, $\displaystyle\sum \int_0^\pi \frac{x^{2n}}{(2n)!}\left|\sin^{2n}(t)\right|\mathrm{d}t$ converge et le théorème d'interversion série-intégrale s'applique.

7. Grâce à la question 5., les coefficients d'une solution développables en série entières sont tous déterminés par la valeur de $a_0 = f(0)$. On en déduit déjà l'unicité. On vérifie enfin que $f(0) = \displaystyle\int_0^\pi \cos(0)\mathrm{d}t = \pi$ et donc $f$ est l'unique solution développable en série entière de $(E)$ telle que $f(0) = \pi$.

8. La relation de récurrence de la question 5. permet d'écrire avec $a_0 = f(0) = \pi$ :

$$a_{2n+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)^2(2n-2)^2 ... \times 2^2}\pi = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}\pi$$

La comparaison des développements en série entière donne la relation $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}W_n$ et donc on en déduit que

$$W_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

# 2 Problème 1 - Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

## 2.1 Partie I - Un développement en série entière

9. On a

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)\frac{x^n}{n!}$$

et la série entière est de rayon 1.

10. En prenant $a = -\dfrac{1}{2}$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right)\frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

On calcule le produit

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right) &= (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{2} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) \end{aligned}$$

Et on calcule :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) &= (2n-1)\times(2n-3)\times ...\times 3\times 1\\ &= \frac{2n(2n-1)}{2n}\times\frac{(2n-2)(2n-3)}{2n-2}\times ...\times\frac{4\times 3}{4}\times\frac{2\times 1}{2}\\ &= \frac{(2n)!}{2n(2n-2)...4\times 2}\\ &= \frac{(2n)!}{2^n n!}\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n$$

### 2.2 Partie II - Probabilité de retour à l'origine

11. $\dfrac{X_t+1}{2}$ est à support dans $\{0,1\}$ et $\left(\dfrac{X_t+1}{2}=0\right)=(X_t=-1)$. Ainsi, $\dfrac{X_t+1}{2}$ est une variable de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X_t=1)=p$.
Comme les $(X_t)_{t\geqslant 1}$ sont indépendants, les $\left(\dfrac{X_t+1}{2}\right)_{t\geqslant 1}$ aussi et suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p$.
Donc, $\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\frac{X_t+1}{2}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $(n,p)$.

12. On note $\widetilde{S}_n=\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\frac{X_t+1}{2}$, alors
$$\widetilde{S}_n=\frac{1}{2}S_n+\frac{n}{2}$$
Ainsi, les événements $S_n=0$ et $\widetilde{S}_n=\dfrac{n}{2}$ sont égaux. Ainsi, si $n$ est impair, on a déjà $u_n=\mathbb{P}\left(\widetilde{S}_n=\dfrac{n}{2}\right)=0$.
Enfin, si $n$ est pair, on a
$$u_n=\mathbb{P}\left(\widetilde{S}_n=\frac{n}{2}\right)=\binom{n}{\frac{n}{2}}p^{\frac{n}{2}}(1-p)^{n-\frac{n}{2}}=\binom{n}{\frac{n}{2}}\big(p(1-p)\big)^{\frac{n}{2}}$$

13. On utilise l'équivalent de Stirling :
$$\begin{aligned}u_{2n} &= \binom{2n}{n}\big(p(1-p)\big)^n\\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\big(p(1-p)\big)^n\\ &\sim \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}\big(p(1-p)\big)^n\\ &\sim \frac{\big(4p(1-p)\big)^n}{\sqrt{\pi n}}\end{aligned}$$
Une étude de la fonction $p\in[0,1]\longmapsto 4p(1-p)$ montre qu'elle admet un maximum strict en $p=\dfrac{1}{2}$ et qu'elle y vaut 1. Ainsi,
   - Si $p=\dfrac{1}{2}$, $u_n\sim\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}\longrightarrow 0$.
   - Sinon, $u_n\sim\dfrac{C^n}{\sqrt{\pi n}}\longrightarrow 0$ avec $C=4p(1-p)<1$.

   Si la marche est déséquilibrée, la probabilité de retour à l'origine au temps $n$ décroît exponentiellement plus rapidement que dans le cas de la marche équilibrée.

### 2.3 Nombre de passages par l'origine

14. $T_n$ représente le nombre de passage à l'origine avant le temps $n$.
15. $O_{2j}$ est une variable de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(S_{2j}=0)=u_{2j}$. Ainsi, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(T_n)=\sum_{j=0}^{n}\mathbb{E}(O_{2j})=\sum_{j=0}^{n}u_{2j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{2j}{j}\big(p(1-p)\big)^j$$

16. La question 10. nous permet d'écrire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n$ a un rayon de convergence $\dfrac{1}{4}$ et vaut $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$. Et ainsi, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(T_n)=\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{2j}{j}\big(p(1-p)\big)^j$$

Mais comme $p\neq\dfrac{1}{2}$, on a $p(1-p)<\dfrac{1}{4}$ et donc, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(T_n)=\frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}$$

Ainsi, en moyenne, il y a un nombre fini de passages par l'origine.

17. Si $p=\dfrac{1}{2}$, on a via la question 15. : $\mathbb{E}(T_n)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{4^j}\binom{2j}{j}$. On montre la formule voulue par récurrence. Si $n=0$, on a $\mathbb{E}(T_0)=1$ et $\dfrac{2n+1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}=1$.

Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose que $\mathbb{E}(T_n)=\dfrac{2n+1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_{n+1}) &= \mathbb{E}(T_n)+\frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1}\\
&= \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n}+\frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1}\\
&= \frac{2n+1}{4^n}\frac{(2n)!(n+1)^2\times(2n+2)}{\big((n+1)!\big)^2(2n+2)}+\frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1}\\
&= \left(\frac{4(n+1)^2}{(2n+2)}+1\right)\frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1}\\
&= \frac{2n+3}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1}
\end{aligned}$$

ce qui est la formule qu'il fallait trouver. On en déduit alors par l'équivalent de Stirling :

$$\mathbb{E}(T_n)\sim\frac{2n+1}{\sqrt{\pi n}}\sim\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}\longrightarrow+\infty$$

**Remarque :** Si $p=\dfrac{1}{2}$, on ne peut plus utiliser a priori la question 10., car $p(1-p)=\dfrac{1}{4}$ et on est sur le bord du disque de convergence.

## 3 Problème 2 - Puissances de matrices et limites de suites de matrices

### 3.1 Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

18. La matrice $M(a,b)$ est symétrique réelle, donc par le théorème spectral, elle est diagonalisable.

19. On calcule :

$$M(a,b)V = \begin{pmatrix} b & a & a & \dots & a \\ a & b & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & b & a \\ a & \dots & a & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b + (n-1)aV$$

Ainsi, $V$ est vecteur propre de $M(a,b)$ associée à la valeur propre $b+(n-1)a$.

20. D'après la question précédente $n-1$ est une valeur propre de $M(1,0)$. On a

$$-I_n - M(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice de rang 1, donc par le théorème du rang, son noyau est de rang $n-1$. Ainsi, $-1$ est valeur propre de multiplicité $n-1$ de $M(1,0)$.
Comme $M(1,0)$ est diagonalisable (d'après la question 18.), sa multiplicité est aussi l'ordre de multiplicité dans le polynôme caractéristique, ie :

$$P_{1,0}(X) = \big(X-(n-1)\big)(X+1)^{n-1}$$

21. On a

$$\begin{aligned} P_{a,b}(X) &= \det\big(XI_n - bI_n - aM(1,0)\big) \\ &= a^n \det\left(\frac{X-b}{a}I_n - M(1,0)\right) \\ &= a^n P_{1,0}\left(\frac{X-b}{a}\right) \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$P_{a,b}(X) = a^n \left(\frac{X-b}{a} - (n-1)\right)\left(\frac{X-b}{a}+1\right)^{n-1} = \big(X-(b+a(n-1))\big)\big(X-(b-a)\big)^{n-1}$$

Ainsi, les valeurs propres de $M(a,b)$ sont $b+a(n-1)$ de multiplicité 1 et $b-a$ de multiplicité $n-1$.

22. On calcule, en notant $J$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} Q\big(M(a,b)\big) &= \big(M(a,b)-(b-a)I_n\big)\cdot\big(M(a,b)-(b+(n-1)a)I_n\big) \\ &= \big(aI_n + aM(1,0)\big)\cdot\big(aM(1,0) - a(n-1)I_n\big) \\ &= (aJ)\cdot(aJ - anI_n) \\ &= a^2(J^2 - nJ) \end{aligned}$$

Et on calcule facilement $J^2$ qui donne $nJ$. Donc, $Q$ est bien annulateur de $M(a,b)$.

Si $a \neq 0$, on en déduit que $Q_{a,b}$ est scindé à racines simples et est annulateur de $M(a,b)$, donc $M(a,b)$ est diagonalisable.
Si $a = 0$, alors $M(a,b)$ est diagonale donc diagonalisable.

23. Si $k=0$ ou $k=1$, alors le reste de la division euclidienne de $X^k$ par $Q_{a,b}$ est lui-même. On suppose maintenant $k \geqslant 2$ et on écrit $X^k = Q_{a,b}P + R$ avec $\deg(R) < \deg(Q_{a,b}) = 2$. On peut donc écrire $R = \lambda X + \mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
En évaluant cette relation en $b-a$, puis en $b+(n-1)a$, on trouve

$$\begin{cases} (b-a)^k &= \lambda(b-a)+\mu \\ \big(b+(n-1)a\big)^k &= \lambda\big(b+(n-1)a\big)+\mu \end{cases} \iff \begin{pmatrix} (b-a)^k \\ \big(b+(n-1)\big)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b-a & 1 \\ b+(n-1)a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est $(b-a)-(b+(n-1)a) = -na \neq 0$. Et les solutions sont

$$\lambda = -\frac{\begin{vmatrix} (b-a)^k & 1 \\ \big(b+(n-1)a\big)^k & 1 \end{vmatrix}}{na} \qquad \text{et} \qquad \mu = -\frac{\begin{vmatrix} b-a & (b-a)^k \\ b+(n-1)a & \big(b+(n-1)a\big)^k \end{vmatrix}}{na}$$

d'où,

$$\lambda = \frac{\big(b+(n-1)a\big)^k - (b-a)^k}{na} \qquad \text{et} \qquad \frac{\big(b+(n-1)a\big)(b-a)^k - (b-a)\big(b+(n-1)a\big)^k}{na}$$

Ainsi, en évaluant la division euclidienne en $M(a,b)$, on trouve, avec le fait que $Q_{a,b}$ est annulateur de $M(a,b)$ :

$$\begin{aligned} M(a,b)^k &= R\big(M(a,b)\big) \\ &= \lambda M(a,b) + \mu I_n \\ &= \frac{\big(b+(n-1)a\big)^k - (b-a)^k}{na} M(a,b) + \frac{\big(b+(n-1)a\big)(b-a)^k - (b-a)\big(b+(n-1)a\big)^k}{na} I_n \end{aligned}$$

24. Diagonalisons $M(a,b)$ : il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$M(a,b) = P^{-1}DP \qquad \text{avec} \qquad D = \begin{pmatrix} b-a & 0 \\ 0 & b+(n-1)a \end{pmatrix}$$

L'hypothèse donne que $D^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $M(a,b)^k = P^{-1}D^kP \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

**Remarque :** On aurait aussi pu utiliser la question précédente. Sauf que gardons à l'idée qu'en général, l'étude du comportement de $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ se fait plutôt par l'étude du spectre de $M$.

## 3.2 Limite des puissances d'une matrice

25. Par définition, on a $u(e_1) = \lambda_1 e_1$ et donc $u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1$. Ainsi, $\big\|u^k(e_1)\big\| = |\lambda_1|^k \|e_1\|$, mais comme $|\lambda_1| < 1$, on a $|\lambda_1|^k \longrightarrow 0$ et donc

$$\lim_{k\to+\infty} u^k(e_1) = 0$$

26. On écrit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \lambda_{i+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ la $(i+1)$-ème colonne de $T$ et $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} x_j e_j \in \mathrm{Vect}(e_j)_{j\in[\![1,i]\!]}$ et par définition de $u$ et de $T$, on a

$$u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x$$

On démontre cette propriété par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$. La propriété est obtenue pour $k=1$ via la question précédente.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose la formule vraie au rang $k$. Alors

$$\begin{aligned} u^{k+1}(e_{i+1}) &= u \circ u^k(e_{i+1}) \\ &= u\left(\lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)\right) \\ &= \lambda_{i+1}^k u(e_{i+1}) + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^{m+1}(x) \\ &= \lambda_{i+1}^{k+1} u(e_{i+1}) + \lambda_{i+1}^k u(x) + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^{m+1}(x) \\ &= \lambda_{i+1}^{k+1} u(e_{i+1}) + \sum_{m=0}^{k} \lambda_{i+1}^{k-m} u^m(x) \end{aligned}$$

27. On a :
$$\left\|\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)\right\| \leqslant \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| = \sum_{m=1}^{k} |\lambda_{i+1}|^{k-m} \|u^{m-1}(x)\|$$
On va exploiter le fait que $x \in \mathrm{Vect}(e_j)_{j\in[\![1,i]\!]}$, donc par hypothèse, $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(x) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $\|u^n(x)\| \leqslant \varepsilon$. Soit $n \geqslant N$, on a :
$$\sum_{m=1}^{n} |\lambda_{i+1}|^{n-m} \|u^m(x)\| = \sum_{m=1}^{N} |\lambda_{i+1}|^{n-m} \|u^m(x)\| + \sum_{m=N+1}^{n} |\lambda_{i+1}|^{n-m} \|u^m(x)\|$$
Pour chaque $m \in [\![1, N]\!]$, la suite $\left(|\lambda_{i+1}|^{n-m}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc si $n$ est assez grand, on a pour tout $m \in [\![1, N]\!], |\lambda_{i+1}|^{n-m} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\sum\limits_{m=1}^{N} \|u^m(x)\|}$, ainsi, on a
$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n} |\lambda_{i+1}|^{n-m} \|u^m(x)\| &\leqslant \varepsilon + \sum_{m=N+1}^{n} |\lambda_{i+1}|^{n-m} \varepsilon \\ &\leqslant \varepsilon + \sum_{m\in\mathbb{N}} |\lambda_{i+1}|^{m} \varepsilon \\ &\leqslant \left(1 + \frac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|}\right) \varepsilon \end{aligned}$$
On en déduit alors que
$$\lim_{k\to+\infty} \left\|\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)\right\| = 0$$
Comme d'autre part $\lambda_{i+1}^k e_{i+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a donc par somme $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_{i+1}) = 0$.
28. Dans les questions 25. à 27., on a montré par récurrence forte que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_i) = 0$.
Ainsi, $(u^k)_{k\geqslant 1}$ converge vers 0 dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ et comme $T$ est la matrice de $u$ dans la base canonique, $(T^k)$ converge aussi dans $M_n(\mathbb{C})$ vers 0.
29. Comme $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A$ est trigonalisable : il existe $T$ triangulaire supérieure et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PTP^{-1}$ et donc $A^k = PT^kP^{-1} \longrightarrow 0$ par continuité du produit matriciel.

### 3.3 Application à la méthode de Gauss-Seidel

30. On montre que la diagonale de $A$ ne contient aucun coefficient nul : si c'était le cas, disons à la ligne $i_0$, alors comme $0 = |a_{i_0,i_0}| > \sum\limits_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|$, ce qui est impossible.
Comme $M$ est alors une matrice triangulaire inférieure dont la diagonale (celle de $A$) ne contient aucun coefficient nul, donc est inversible.
31. On écrit $AX = Y$ sous la forme $MX - FX = Y$, d'où en composant à gauche par $M^{-1}$, $X - BX = M^{-1}Y$, ce qui est la relation cherchée.
32. On utilise la relation $B = M^{-1}F$, d'où $FV = MBV = \lambda MV$. Cette relation s'écrit, en tenant compte de la définition de $M$ et $V$ :
$$-\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} v_j = \lambda \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} v_j$$
ce qui se réécrit
$$a_{i,i} v_i = -\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} v_j\right)$$

33. Comme $V$ est un vecteur propre, il dispose d'au moins un coefficient non nul. En prenant le coefficient $i_0$ tel que $|v_{i_0}| = \max_{j \in [\![1,n]\!]} |v_j|$, on a $|v_{i_0}| > 0$. On déduit alors de la question précédente que

$$|\lambda a_{i_0,i_0}||v_{i_0}| \leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j} v_j| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j} v_j| \leqslant \left( \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}| \right) |v_{i_0}|$$

et comme $|v_{i_0}| \neq 0$, on peut simplifier par ce dernier et obtenir la relation voulue.

34. Si $|\lambda| \geqslant 1$, on aurait $\displaystyle\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| \leqslant |\lambda| \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}|$ et donc la relation précédente donnerait, en simplifiant par $|\lambda| \neq 0$ :

$$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$$

ce qui est contraire à l'hypothèse de diagonale strictement dominante de $A$. Donc, $|\lambda| < 1$.

On a alors montré que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(B), |\lambda| < 1$ et donc par la partie précédente, on en déduit que $\lim_{k \to +\infty} B^k = 0$.

35. Par la question 31., on transforme la relation de récurrence des $(X_k)$ en :

$$\begin{array}{rcl} X_{k+1} & = & BX_k + M^{-1}Y \\ & = & BX_k + X - BX \end{array}$$

D'où la relation,

$$\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} - X = B(X_k - X)$$

Ainsi, on en déduit par récurrence immédiate que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, X_k - X = B^k(X_0 - X)$$

mais comme $\lim_{k \to +\infty} B^k = 0$, on en déduit que $\lim_{k \to +\infty} X_k = X$.