CONCOURS COMMUN INP 2023
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2- MP

m.laamoum@gmail.com

EXERCICE I

Q1. $\triangleright$ Pour tout P, Q dans E on a $P(x)Q(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge et l'application $(P, Q) \mapsto \langle P \mid Q\rangle$ est bien définie.

$\triangleright$ La linéarité de l'intégrale entraine la bilinéarité de $\langle . \mid .\rangle$.

$\triangleright$ La symétrie de $\langle . \mid .\rangle$ est évidente .

$\triangleright$ On a $\langle P \mid P\rangle = \int_0^{+\infty} P^2(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x \geq 0$ car $P^2(x)e^{-x} \geq 0 \quad \forall x \in [0, +\infty[$.

$\triangleright$ Si $\langle P \mid P\rangle = \int_0^{+\infty} P^2(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0$, comme la fonction $x \mapsto P^2(x)e^{-x}$ est continue positive alors elle s'annule sur $[0, +\infty[$ par suite P s'annule sur $[0, +\infty[$ donc P est le polynôme nul *(car il admet une infinité de racines)*

Finalement l'application $(P, Q) \mapsto \langle P \mid Q\rangle$ est un produit scalaire sur E.

Q2. $\triangleright$ Cherchons une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_1[X]$:

Posons $P_0 = 1$ et $P_1 = X + a$ tels que $\langle P_0 \mid P_1\rangle = 0$, alors on a :

$$\langle X + a \mid 1\rangle = \langle X \mid 1\rangle + a\langle 1 \mid 1\rangle = 0$$

de plus $\langle 1 \mid 1\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$ et $\langle X \mid 1\rangle = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 1$, donc $a = -1$ et $R = X - 1$.
La famille (P_0, P_1) est orthogonale , de plus on a $\|P_0\| = 1$ et

$$\begin{aligned}
\|P_1\|^2 &= \int_0^{+\infty}(x-1)^2e^{-x}dx \\
&= \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx - 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc la famille (P_0, P_1) est orthonormée , par suite c'est une base orthonormée de F.

$\triangleright$ On a $P_F\left(X^2\right) = \langle X^2 \mid P_0\rangle P_0 + \langle X^2 \mid P_1\rangle P_1$, avec :

$$\begin{aligned}
\langle X^2 \mid P_0\rangle &= \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = 2 \\
\langle X^2 \mid P_1\rangle &= \int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx - \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = 4
\end{aligned}$$

donc $\boxed{P_F\left(X^2\right) = 2P_0 + 4P_1 = 4X - 2}$.

Q3. $\triangleright$ Ecrivons $\|X^2\|^2 = \|(X^2 - P_F\left(X^2\right)) + P_F\left(X^2\right)\|^2$ et on sait que $P_F\left(X^2\right)$ est l'unique élément de F tel que $X^2 - P_F\left(X^2\right)$ est dans $F^\perp$ donc $P_F\left(X^2\right) \perp \left(X^2 - P_F\left(X^2\right)\right)$, le théorème de Pythagore donne :

$$\left\|X^2 - P_F\left(X^2\right)\right\|^2 = \left\|X^2\right\|^2 - \left\|P_F\left(X^2\right)\right\|^2$$

$\triangleright$ On a

$$\begin{aligned}
\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty}\left(x^2 - ax - b\right)^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left\|X^2 - (aX + b)\right\|^2 \\
&= d^2(X^2, F)
\end{aligned}$$

d'après le théorème de la projection orthogonale on a $d^2(X^2,F)=\|X^2-P_F(X^2)\|^2$, donc

$$d^2(X^2,F)=\left\|X^2\right\|^2-\left\|P_F\left(X^2\right)\right\|^2$$

le calcul donne :

$$\begin{aligned}\left\|X^2\right\|^2 &= \int_0^{+\infty} x^4e^{-x}dx=24\\ \left\|P_F\left(X^2\right)\right\|^2 &= \int_0^{+\infty}(4x-2)^2e^{-x}dx\\ &= 16\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx-16\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx+4\int_0^{+\infty}e^{-x}dx\\ &= 20\end{aligned}$$

d'où

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{+\infty}\left(x^2-ax-b\right)^2e^{-x}\,\mathrm{d}x=d^2(X^2,F)=4$$

EXERCICE II

Q4. $Z=\sup(X,Y)$ et $T=\inf(X,Y)$, on a $T\leq Z$ donc :

▷ Si $m<n$ alors $\mathbb{P}([Z=m]\cap[T=n])=0$.

▷ Si $m>n$ alors

$$[Z=m]\cap[T=n]=([X=m]\cap[Y=n])\cup([X=n]\cap[Y=m])$$

c'est une réunion d'événements disjoints ainsi

$$\mathbb{P}\left([Z=m]\cap[T=n]\right)=\mathbb{P}\left([X=m]\cap[Y=n]\right)+\mathbb{P}\left([X=n]\cap[Y=m]\right)$$

par indépendance de X et Y on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left([Z=m]\cap[T=n]\right) &= \mathbb{P}\left([X=m]\right)\mathbb{P}\left([Y=n]\right)+\mathbb{P}\left([X=n]\right)\mathbb{P}\left([Y=m]\right)\\ &= 2p^2q^{n+m}\end{aligned}$$

▷ Si $m=n$ alors

$$[Z=n]\cap[T=n]=([X=n]\cap[Y=n])$$

et

$$\mathbb{P}\left([Z=n]\cap[T=n]\right)=\mathbb{P}\left([X=n]\cap[Y=n]\right)$$

l'indépendance de X et Y donne

$$\mathbb{P}\left([Z=n]\cap[T=n]\right)=\mathbb{P}\left([X=n]\right)\mathbb{P}\left([Y=n]\right)=p^2q^{2n}$$

Finalement :

$$\mathbb{P}\left([Z=m]\cap[T=n]\right)=\begin{cases}0 & \text{si } m<n\\ p^2q^{2n} & \text{si } m=n\\ 2p^2q^{n+m} & \text{si } m>n\end{cases}$$

Q5. La famille $([T=n])_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements donc pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a :

$$\mathbb{P}(Z=m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Z=m]\cap[T=n])$$

or si $m<n$ $\mathbb{P}([Z=m]\cap[T=n]) = 0$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=m) &= \sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}([Z=m]\cap[T=n]) \\
&= p^2q^{2m} + \sum_{n=0}^{m-1} 2p^2q^{n+m} \\
&= p^2q^{2m} + 2p^2q^m\frac{1-q^m}{1-q}\sum_{n=0}^{m-1} 2p^2q^{n+m}
\end{aligned}$$

ce qui donne $\boxed{\mathbb{P}(Z=m) = pq^m \ (2-(q+1)q^m)}$

PROBLEME
Partie I

Q6. Un exemple -

$\triangleright$ La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle donc elle est diagonalisable.

$\triangleright$ On vérifie facilement que : $\Pi_1^2 = \Pi_1$, $\Pi_2^2 = \Pi_2$ ainsi Π_1 et Π_2 sont des matrices de projecteur. $\Pi_1 + 5\Pi_2 = A$, $\Pi_1 + \Pi_2 = I_2$ et $\Pi_1\Pi_2$

Q7. u un endomorphisme de E et P et Q deux polynômes premiers entre eux.

$\triangleright$ Soit $x \in \operatorname{Ker}(P(u))$ donc $P(u)(x) = 0$ et $(QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$ donc $[(QP)(u)](x) = Q(u)(P(u)(x)) = 0$ ce qui donne $x \in \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$, ainsi $\operatorname{Ker}(P(u)) \subset \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\operatorname{Ker}(Q(u)) \subset \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$). $\triangleright$ On applique le théorème de Bézout : Il existe $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tels que $AP + BQ = 1$. Ce qui donne

$$\mathrm{Id}_E = (AP + BQ)(u) = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u)$$

Donc si $x \in \ker P(u) \cap \ker Q(u)$, on a :

$$\begin{aligned} x &= (A(u) \circ P(u))(x) + (B(u) \circ Q(u))(x) \\ &= \underbrace{A(u)(P(u)(x))}_{=0} + \underbrace{B(u)(Q(u)(x))}_{=0} \\ &= \end{aligned}$$

Ainsi $\ker P(u) \cap \ker Q(u) = \{0\}$.

$\triangleright$ On a $\ker(P \times Q)(u) \subset \ker P(u) + \ker Q(u)$ et si $x \in \ker(P \times Q)(u)$, alors :

$$x = \underbrace{(A(u) \circ P(u))(x)}_{\in \ker Q(u)} + \underbrace{(B(u) \circ Q(u))(x)}_{\in \ker P(u)}.$$

En effet, $Q(u)(P(u) \circ A(u)(x)) = (A(u) \circ (P \times Q)(u))(x) = 0$ et $P(u)(Q(u) \circ B(u)(x)) = (B(u) \circ (P \times Q)(u))(x) = 0$. Donc $\operatorname{Ker}[(PQ)(u)] = \operatorname{Ker}(P(u)) + \operatorname{Ker}(Q(u))$

Finalement on a montrer : $\operatorname{Ker}[(PQ)(u)] = \operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u))$.

Q8. On a $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$, P_1 et P_2 sont premiers entre eux., $Q_1 = P_2^{k_2}$ et $Q_2 = P_1^{k_1}$.

Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux, le théorème de Bézout donne : il existe deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$.

Pour la suite de cette partie, on notera $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots {P_m}^{k_m}$ la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}, Q_i = \dfrac{\pi_u}{{P_i}^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 + \dots + R_mQ_m = 1$.

Q9. On a $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots {P_m}^{k_m}$,pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}, Q_i = \dfrac{\pi_u}{{P_i}^{k_i}}$. $i \in \{1, 2, \dots, m\}, p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$.

$\triangleright$ Il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 + \dots + R_mQ_m = 1$ et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, m\}, p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$ donc

$$R_1(u) \circ Q_1(u) + \dots + R_m(u) \circ Q_m(u) = id_E$$

par suite $\boxed{\sum_{i=1}^{m} p_i = id_E}$.

▷ Soit i, j des entiers distincts de $\{1, 2, \ldots, m\}$, on a

$$\begin{aligned} p_i \circ p_j &= R_i(u) \circ Q_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_j(u) \\ &= R_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_i(u) \circ Q_j(u) \\ &= (R_i R_j)(u) \circ (Q_i Q_j)(u) \end{aligned}$$

et $Q_i Q_j = \dfrac{\pi_u}{{P_i}^{k_i}} \dfrac{\pi_u}{{P_j}^{k_j}} = \pi_u . \dfrac{\pi_u}{{P_i}^{k_i} {P_j}^{k_j}}$, *car* ${P_i}^{k_i} {P_j}^{k_j}$ *divise* π_u , par suite π_u divise $Q_i Q_j$, il est donc annulateur de u d'où $p_i \circ p_j = 0$.

▷ Soit i dans $\{1, 2, \ldots, m\}$, on a

$$\begin{aligned} p_i &= p_i \circ id_E \\ &= p_i \circ \sum_{j=1}^{m} p_j \\ &= p_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} p_i \circ p_j \end{aligned}$$

or si $i \neq j$ on a $p_i \circ p_j = 0$ donc $p_i^2 = p_i$, et p_i est un projecteur .

Q10. On a $\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et pour tout $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $N_i = \ker(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$.

Les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux , le théorème de décomposition des noyaux donne

$$\ker \chi_u(u) = \bigoplus_{i=1}^{m} \ker(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$$

d'après le théorème de Cayley-Hamilton on a $\chi_u(u) = 0$ donc $\ker \chi_u(u) = E$ d'où

$$E = \bigoplus_{i=1}^{m} N_i$$

Q11. ▷ La somme $\operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$ est directe :

Soit $(y_1, ..., y_m) \in \operatorname{Im} p_1 \times \ldots \times \operatorname{Im} p_m$ tels que $y_1 + ... + y_m = 0$, il existe $x_1, ..., x_m$ dans E verifiant $y_i = p_i(x_i)$ pour tout i dans $\{1, ..., m\}$. Soit i, j distinct dans $\{1, ..., m\}$ alors

$$p_i(y_j) = (p_i \circ p_j)(x_j) = 0 \text{ et } p_i(y_i) = (p_i \circ p_i)(x_i) = p_i(x_i) = y_i$$

ce qui donne

$$p_i(y_1) + ... + p_i(y_m) = y_i = 0$$

donc $(y_1, ..., y_m) = (0, ..., 0)$, ce qui prouve que la somme $\operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$ est directe

▷ $E = \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$:

On a $\operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m \subset E$ et $p_1 + \ldots + p_m = id_E$ donc pour tout x dans E on a $x = p_1(x) + \ldots + p_m(x)$ donc $x \in \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$ par suite $E \subset \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$, d'où $E = \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$.

Ainsi on a $E = \operatorname{Im} p_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} p_m$

Q12. D'après le théorème de Cayley-Hamilton on a π_u divise $\chi_u = \prod_{i=1}^{m}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et l'ensemble des racines de π_u est exactement le spectre de u , donc $\pi_u = \prod_{i=1}^{m}(X-\lambda_i)^{\beta_i}$ avec $0 < \beta_i \leq \alpha_i$, on a alors $P_i^{k_i} = (X-\lambda_i)^{\beta_i}$, a l'indice près .
Soit $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et $y_i = p_i(x_i) \in \operatorname{Im} p_i$, puisque $P_i^{k_i}$ divise $(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et $P_i^{k_i}(p_i) = \pi_u(u) = 0$ alors $(X-\lambda_i)^{\alpha_i}(p_i) = 0$, par suite $y_i \in N_i$ et $\operatorname{Im} p_i \subset N_i$.
D'autre part $E = \operatorname{Im} p_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} p_m = N_1 \oplus \ldots \oplus N_m$ donc

$$\dim(\operatorname{Im} p_1) \oplus \ldots \oplus \dim(\operatorname{Im} p_m) = \dim(N_1) \oplus \ldots \oplus \dim(N_m)$$

Supposons qu'il existe $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \operatorname{Im} p_i \neq N_i$ donc $\dim(\operatorname{Im} p_i) < \dim(N_i)$ par suite

$$\dim(\operatorname{Im} p_1) \oplus \ldots \oplus \dim(\operatorname{Im} p_m) < \dim(N_1) \oplus \ldots \oplus \dim(N_m)$$

ce qui est absurde donc $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ on a $\dim(\operatorname{Im} p_i) = \dim(N_i)$ et $\operatorname{Im} p_i = N_i$.

Partie II

Q13. u est diagonalisable donc son polynôme minimal est scindé à racines simples d'où :

$$\pi_u = \prod_{i=1}^{m}(X-\lambda_i)$$

Q14. On a , pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X-\lambda_i$, et $\theta_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)}$.

▷ Avec un peut de détails, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\pi_u}$ s'écrit :

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{X-\lambda_i}$$

avec $a_i = \left[\dfrac{P_i(X)}{\pi_u(X)}\right]_{X=\lambda_i} = \left[\dfrac{1}{Q_i(X)}\right]_{X=\lambda_i} = \theta_i$ donc

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i}{X-\lambda_i}$$

▷ Cette relation donne

$$1 = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \frac{\pi_u}{X-\lambda_i} = \sum_{i=1}^{m} \theta_i Q_i$$

suivant les notation de Q10 on a pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, p_i = \theta_i Q_i(u) = \dfrac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

Q15. On suppose que $\deg \pi_u > 1$. On a $1 = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \dfrac{\pi_u}{X-\lambda_i}$ donc

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{m} \theta_i \frac{X-\lambda_i+\lambda_i}{X-\lambda_i}\pi_u \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} \theta_i\right)\pi_u + \sum_{i=1}^{m} \theta_i \lambda_i Q_i(X) \end{aligned}$$

De la relation $\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i}{X-\lambda_i}$ on a $\frac{x}{\pi_u(x)} = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \frac{x}{x-\lambda_i}$ et on fait tendre x vers $+\infty$, on obtient $\sum_{i=1}^{m} \theta_i = 0$, d'où

$$X = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \lambda_i Q_i(X) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$$

Par substitution de X par u on obtient

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i.$$

Si $\deg \pi_u = 1$, alors $\pi_u = X - \lambda_1$ et $u = \lambda_1.p_1$ avec $p_1 = id_E$.

Q16. Exemple : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) La matrice A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable. Et $A^2 = 4A$.

b) On a $A^2 = 4A$ donc $X^2 - 4X$ est annulateur de A et π_A divise $X^2 - 4X$, A n'est pas de la forme αI_4 donc forcement $\deg \pi_A \geq 2$ par suite $\pi_A = X^2 - 4X$.

On a

$$\frac{1}{\pi_u} = \frac{\theta_1}{X} + \frac{\theta_2}{X-4}$$

avec $\theta_1 = \left[\frac{X}{\pi_u(X)}\right]_{X=0} = -\frac{1}{4}$ et $\theta_2 = \left[\frac{X-4}{\pi_u(X)}\right]_{X=4} = \frac{1}{4}$, donc

$$\frac{1}{\pi_u} = \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{X} + \frac{1}{X-4}\right)$$

et $Q_1 = X - 4$, $Q_2 = X$. matrice A.

Par suite $\Pi_1 = \frac{Q_1(A)}{Q_1(0)} = I_4 - \frac{1}{4}A$ et $\Pi_2 = \frac{Q_2(A)}{Q_2(4)} = \frac{1}{4}A$.

c) On a $A = \lambda_1 \Pi_1 + \lambda_2 \Pi_2$, avec $\Pi_1.\Pi_2 = \Pi_2.\Pi_1 = 0$ et $\Pi_1^k = \Pi_1$, $\Pi_2^k = \Pi_2$ pour tout entier naturel $k \geq 1$, par suite $A^k = \lambda_1^k \Pi_1 + \lambda_2^k \Pi_2$, anisi $A^k = 4^{k-1}A$.

Q17. On a $\mathbb{C}[v] = \{P(v) \ , P \in \mathbb{C}[X]\}$, posons $\pi_v(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + .. + a_0$.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ on effectue la division euclidienne de P par π_v :

$$P = Q\pi_v + R \ \text{ avec } \ \deg R \leq d-1,$$

par substitution on a

$$P(v) = Q(v) \circ \pi_v(v) + R(v) = R(v),$$

donc $P(v) \in \text{vect}\left\{id_E, v, ..., v^{d-1}\right\}$ et $\mathbb{C}[v] \subset \text{vect}\left\{id_E, v, ..., v^{d-1}\right\}$. Par suite $\dim \mathbb{C}[v] \leq d$.
Si on suppose que $\dim \mathbb{C}[v] \leq d-1$ alors la famille $\left\{id_E, v, ..., v^{d-2}\right\}$ est liée ainsi il existe un polynôme annulateur de v de degré inferieur à $d-1$ ce qui contredit le fait que $\deg \pi_v = d$. Donc $\dim \mathbb{C}[v] = d$.

Q18. On a $\deg \pi_u = m = \dim \mathbb{C}[u]$.

La famille $(p_1, \dots, p_m)$ est libre :

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ dans $\mathbb{C}^m$ tels que $\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_m p_m = 0$, on compose par p_j , sachant que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et $p_i \circ p_i = p_i$, on obtient $\alpha_j = 0$, ainsi $(p_1, \dots, p_m)$ est libre.

$(p_1, \dots, p_m)$ est libre de cardinal m donc c'est une base de $\mathbb{C}[u]$.

Q19. Si u non diagonalisable, alors π_u n'est pas à racines simple et $\deg \pi_u > m$, donc la famille $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ n'est pas génératrice et n'est pas une base de $\mathbb{C}[u]$.

Q20. On suppose qu'il existe m endomorphismes non nuls f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ distincts, tels que pour tout entier naturel q on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q f_i$.

Donc pour tout polynôme P on a $P(u) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) f_i$, en particulier le polynôme $P = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$ est annulateur à racines simples , donc u est diagonalisable .

Fin.