**L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.**
**L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit**

*Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les* références *des questions abordées.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Ce sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants à traiter dans l'ordre souhaité.

# Exercice

## Un problème d'extremum

(Noté sur 4 points sur 20)

On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

**1. Quelques propriétés de la fonction $F$**

**1.1.** Justifier que la fonction $F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2$.

**1.2.** Montrer que la fonction $F$ admet un unique point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et le déterminer.

**2. Étude de la nature du point critique $(x_0, y_0)$**

**2.1.** Calculer les dérivées partielles secondes de $F$ au point $(x_0, y_0)$.

**2.2.** À l'aide de la matrice Hessienne, montrer que la fonction $F$ présente un extremum local au point $(x_0, y_0)$. Est-ce un minimum ou un maximum local ?

**3. Étude plus approfondie de l'extremum en question**

**3.1.** Soit$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ; on pose $u = x$ et $v = y - 3$. Vérifier que $F(x,y) = u^2 + uv + v^2 - 9$.

**3.2.** Montrer qu'en fait la fonction $F$ présente un extremum absolu strict au point $(x_0, y_0)$.
*On pourra remarquer que*

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad u^2 + uv + v^2 = \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4}.$$

# Problème

## Exemples d'utilisation d'équations différentielles en analyse

### Notations

Dans ce problème, $I$ désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ; on note $(\mathscr{L}_f)$ l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + y = f. \qquad (\mathscr{L}_f)$$

Si $x_0 \in I$, on définit la fonction $\varphi_{f,x_0} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, \quad \varphi_{f,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans tout le problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles.*

## $1^{\text{ère}}$ Partie
## Expression intégrale des solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$
## Application au cas où $f$ est $2\pi$-périodique

**1.1.** Montrer que l'ensemble $\Sigma_0$ des solutions, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est un espace vectoriel réel ; préciser sa dimension et en donner une base.

**1.2. Recherche d'une solution particulière de $(\mathscr{L}_f)$**

Pour tout $x \in I$, on pose $\quad \varphi_1(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t \quad$ et $\quad \varphi_2(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t.$

**1.2.1.** Justifier que les fonctions $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont dérivables sur $I$ et exprimer $\varphi_1'(x)$ et $\varphi_2'(x)$ pour tout $x \in I$.

**1.2.2.** Montrer que, pour tout $x \in I$, $\quad \varphi_{f,x_0}(x) = \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x$. Que vaut $\varphi_{f,x_0}(x_0)$ ?

**1.2.3.** En déduire que $\varphi_{f,x_0}$ est dérivable sur $I$ et exprimer $\varphi'_{f,x_0}(x)$ pour tout $x \in I$. Que vaut $\varphi'_{f,x_0}(x_0)$ ?

**1.2.4.** Montrer que $\varphi_{f,x_0}$ est deux fois dérivable sur $I$ et qu'elle est solution, sur $I$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$.

**1.2.5.** Montrer que $\varphi_{f,x_0}$ est l'unique solution, sur $I$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ s'annulant ainsi que sa dérivée en $x_0$.

**1.3. Expression intégrale des solutions de $(\mathscr{L}_f)$**

Montrer que les solutions, sur $I$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \alpha\cos x + \beta\sin x + \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t, \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

**1.4. Étude de la périodicité des solutions de $(\mathscr{L}_f)$ dans le cas où $f$ est $2\pi$-périodique**

*Dans cette section, on suppose que $I = \mathbb{R}$ et que $f$ est $2\pi-$périodique.*

**1.4.1.** On suppose que l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ possède une solution $2\pi$-périodique $g$.

(i) Montrer qu'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

(ii) En déduire que, pour tout réel $x$, $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = 0.$

(iii) Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

**1.4.2.** On suppose ici que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0.$

(i) Montrer que, pour tout réel $x$, $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = 0.$

(ii) En déduire, d'abord que $\varphi_{f,0}$ est $2\pi$-périodique, puis justifier qu'il en est de même de toutes les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$.

**1.4.3.** Si $f$ est la fonction sinus, l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ possède-t-elle des solutions $2\pi$-périodiques ?

## $2^{\text{ème}}$ Partie
## Application à l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre et au calcul de l'intégrale de Dirichlet

*Le but de cette partie est de calculer l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, *dite de* DIRICHLET.

**2.1. Convergence d'intégrales**

**2.1.1. Convergence de l'intégrale de DIRICHLET**



→

(i) Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

(ii) Montrer que, pour tout réel $x>0$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$.

(iii) Montrer soigneusement que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente.

**2.1.2.** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$ est également convergente.

### 2.2. Étude de solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ lorsque $I=]0,+\infty[$ et $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$

*Dans cette section, on suppose que $I=]0,+\infty[$ et que $f$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. On cherche à montrer, par analyse-synthèse, que l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ admet une unique solution, sur $]0,+\infty[$, ayant 0 pour limite en $+\infty$.*

**2.2.1. Analyse :** On suppose que $\psi$ est une solution, sur $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ ayant 0 pour limite en $+\infty$.

(i) Montrer qu'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x>0,\quad \psi(x) = \left(\lambda - \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt\right)\cos x + \left(\mu + \int_1^x \frac{\cos t}{t}\,dt\right)\sin x.$$

(ii) Montrer que $\lambda = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ et que $\mu = -\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$. *On pourra considérer les suites numériques $\big(\psi(2n\pi)\big)_{n\geqslant 1}$ et $\big(\psi(\frac{\pi}{2}+2n\pi)\big)_{n\geqslant 1}$.*

(iii) En déduire que, pour tout $x>0$, $\psi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt$.

**2.2.2. Synthèse :** Montrer que la fonction $\psi_1 : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt$ est effectivement solution, sur $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ et qu'elle admet 0 pour limite en $+\infty$.

### 2.3. Étude d'une fonction définie comme une intégrale dépendant d'un paramètre

**2.3.1.** Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

*Dans la suite de cette partie, on pose $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt,\quad x\geqslant 0.$*

**2.3.2.** Calculer $h(0)$.

**2.3.3.** Montrer, en précisant le théorème utilisé, que la fonction $h$ est continue sur $[0,+\infty[$.

**2.3.4.** Montrer, en précisant le théorème utilisé, que la fonction $h$ admet 0 pour limite en $+\infty$.

**2.3.5.** Montrer, en vérifiant soigneusement les hypothèses du théorème utilisé, que la fonction $h$ est de classe $C^2$ sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$, puis donner une expression de $h''$ sous forme intégrale.

**2.3.6.** Montrer que, pour tout réel $x>0$, $h''(x)+h(x) = \dfrac{1}{x}$.

**2.3.7.** En déduire que pour tout $x>0$, $h(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{x+s}\,ds$.

### 2.4. Application au calcul de l'intégrale de Dirichlet

*On reprend ici les notations de la section précédente.*

**2.4.1.** Montrer que, pour tout réel $x>0$,

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leqslant x\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\frac{1}{x+t}\,dt + x\left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(x+t)}\,dt\right|.$$

**2.4.2.** En déduire que pour tout réel $x>0$,

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leqslant x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt.$$

**2.4.3.** Montrer soigneusement que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \lim_{x\to 0^+} h(x) = \frac{\pi}{2}$.

## $3^{\text{ème}}$ Partie
## Application à l'étude de la somme d'une série de fonctions

*On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions définies sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :*

$$\forall\,(n,x)\in\mathbb{N}^*\times[0,+\infty[,\ u_n(x)=\frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

**3.1.** Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

**3.2.** Montrer que, pour tout $a>0$, les séries de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} nu_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^2u_n$ convergent normalement sur l'intervalle $[a,+\infty[$.

*Dans la suite de cette partie, on pose* $u(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$, $x\geqslant 0$.

**3.3. Quelques propriétés de la fonction $u$**

**3.3.1.** Montrer, en précisant le théorème utilisé, que la fonction $u$ est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

**3.3.2.** Montrer de même que la fonction $u$ admet 0 pour limite en $+\infty$.

**3.3.3.** Montrer que la fonction $u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et donner une expression de sa dérivée seconde sous la forme de la somme d'une série de fonctions.

**3.3.4.** Montrer que

$$\forall\,x>0,\quad u''(x)+u(x)=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}.$$

**3.3.5.** En utilisant les résultats de la première partie du problème, montrer qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\,x>0,\quad u(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x+\int_1^x\frac{1}{e^t-1}\sin(x-t)\,dt.$$

**3.4. Une autre expression intégrale de la fonction $u$**

**3.4.1.** Montrer que, pour tout $a>0$, la fonction $t\longmapsto\dfrac{1}{e^t-1}$ est intégrable sur l'intervalle $[a,+\infty[$.

**3.4.2.** En déduire que, pour tout $a>0$, les fonctions $t\longmapsto\dfrac{1}{e^t-1}\sin t$ et $t\longmapsto\dfrac{1}{e^t-1}\cos t$ sont intégrables sur l'intervalle $[a,+\infty[$.

**3.4.3.** Montrer que, pour tout $x>0$, $u(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t-x)}{e^t-1}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin s}{e^{x+s}-1}\,ds.$

**3.5.** Justifier que la fonction $t\longmapsto\dfrac{\sin t}{e^t-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et montrer, en précisant le théorème utilisé, que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{e^t-1}\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2}.$$

FIN DE L'ÉPREUVE