cpge-paradise.com

# Concours National Commun
## Épreuve de Mathématiques I
## Session 2023 - Filière MP

**L'usage de tout matériel électronique, y compris La calculatrice, est interdit**

**Durée : 4 heures**

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

# Exercice

**Un problème d'extremum**

(Noté 4 points sur 20 )

On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

**1. Quelques propriétés de la fonction** $F$

**1.1** Justifier que la fonction $F$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2$.

**1.2** Montrer que la fonction $F$ admet un unique point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et le déterminer.

**2. Étude de la nature du point critique** $(x_0, y_0)$

**2.1** Calculer les dérivées partielles secondes de $F$ au point $(x_0, y_0)$.

**2.2** À l'aide de la matrice Hessienne, montrer que la fonction $F$ présente un extremum local au point $(x_0, y_0)$. Est-ce un minimum ou un maximum local ?

**3. Étude plus approfondie de l'extremum en question**

**3.1** Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ; on pose $u = x$ et $v = y - 3$. Vérifier que $F(x,y) = u^2 + uv + v^2 - 9$.

**3.2** Montrer qu'en fait la fonction $F$ présente un extremum absolu strict au point $(x_0, y_0)$.
*On pourra remarquer que*

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad u^2 + uv + v^2 = \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4}$$

# Problème

**Exemples d'utilisation d'équations différentielles en analyse**

### Notations

Dans ce problème, $I$ désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ; on note $(\mathscr{L}_f)$ l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + y = f$$

Si $x_0 \in I$, on définit la fonction $\varphi_{f,x_0} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, \quad \varphi_{f,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t.$$

Dans tout le problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence aux solutions à valeurs réelles.

cpge-paradise.com

## $1^{\text{ère}}$ Partie

**Expression intégrale des solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ Application au cas où $f$ est $2\pi$-périodiques .**

**1.1** Montrer que l'ensemble $\Sigma_0$ des solutions, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est un espace vectoriel réel ; préciser sa dimension et en donner une base.

**1.2 Recherche d'une solution particulière de $(\mathscr{L}_f)$**

Pour tout $x \in I$, on pose $\varphi_1(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\cos t \,\mathrm{d}t$ et $\varphi_2(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\sin t \,\mathrm{d}t$.

**1.2.1** Justifier que les fonctions $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont dérivables sur $I$ et exprimer $\varphi_1'(x)$ et $\varphi_2'(x)$ pour tout $x \in I$

**1.2.2** Montrer que, pour tout $x \in I$, $\quad \varphi_{f,x_0}(x) = \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x$. Que vaut $\varphi_{f,x_0}(x_0)$ ?

**1.2.3** En déduire que $\varphi_{f,x_0}$ est dérivable sur $I$ et exprimer $\varphi'_{f,x_0}(x)$ pour tout $x \in I$. Que vaut $\varphi'_{f,x_0}(x_0)$?

**1.2.4** Montrer que $\varphi_{f,x_0}$ est deux fois dérivable sur $I$ et qu'elle est solution, sur $I$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$

**1.2.5** Montrer que $\varphi_{f,x_0}$ est l'unique solution, sur $I$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ s'annulant ainsi que sa dérivée en $x_0$.

**1.3. Expression intégrale des solutions de $(\mathscr{L}_f)$**

Montrer que les solutions, sur $I$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \alpha\cos x + \beta\sin x + \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t, \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

**1.4. Étude de la périodicité des solutions de $(\mathscr{L}_f)$ dans le cas où $f$ est $2\pi$-périodique**

*Dans cette section, on suppose que $I = R$ et que $f$ est $2\pi$-périodique.*

**1.4.1.** On suppose que l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ possède une solution $2\pi$-périodique $g$.

**i )** Montrer qu'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

**ii )** En déduire que, pour tout réel $x$, $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0$.

**iii )** Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0$.

**1.4.2.** On suppose ici que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t \,\mathrm{d}t = 0$.

**i )** Montrer que, pour tout réel $x$, $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0$.

**ii )** En déduire, d'abord que $\varphi_{f,0}$ est $2\pi$-périodique, puis justifier qu'il en est de même de toutes les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$.

**1.4.3.** Si $f$ est la fonction sinus, l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ possède-t-elle des solutions $2\pi$-périodiques ?

## $2^{\text{ème}}$ Partie

**Application à l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre et au calcul de l'intégrale de Dirichlet**

*Le but de cette partie est de calculer l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$*, dite de Dirichlet.*

cpge-paradise.com

**2.1. Convergence d'intégrales**

**2.1.1. Convergence de l'intégrale de DIRICHLET**

**i )** Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

**ii )** Montrer que, pour tout réel $x>0$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

**iii )** Montrer soigneusement que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

**2.1.2.** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ est également convergente.

**2.2. Étude de solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ lorsque $I=]0,+\infty[$ et $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$**

*Dans cette section, on suppose que $I=]0,+\infty[$ et que $f$ est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$. On cherche à montrer, par analyse-synthèse, que l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ admet une unique solution, sur $]0,+\infty[$, ayant 0 pour limite en $+\infty$.*

**2.2.1. Analyse :** On suppose que $\psi$ est une solution, sur $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ ayant 0 pour limite en $+\infty$.

**i )** Montrer qu'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x>0,\quad \psi(x) = \left(\lambda - \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\cos x + \left(\mu + \int_1^x \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\sin x.$$

**ii )** Montrer que $\lambda = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et que $\mu = -\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$. *On pourra considérer les suites numériques $(\psi(2n\pi))_{n\geqslant 1}$ et $\left(\psi\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right)_{n\geqslant 1}$*

**iii )** En déduire que, pour tout $x>0, \psi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t$.

**2.2.2. Synthèse :** Montrer que la fonction $\psi_1 : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t$ est effectivement solution, sur $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ et qu'elle admet 0 pour limite en $+\infty$.

**2.3. Étude d'une fonction définie comme une intégrale dépendant d'un paramètre**

**2.3.1.** Montrer que, pour tout $x\geqslant 0$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$. *Dans la suite de cette partie, on pose* $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,\quad x\geqslant 0.$

**2.3.2.** Calculer $h(0)$.

**2.3.3.** Montrer, en précisant le théorème utilisé, que la fonction $h$ est continue sur $[0,+\infty[$.

**2.3.4.** Montrer, en précisant le théorème utilisé, que la fonction $h$ admet 0 pour limite en $+\infty$.

**2.3.5.** Montrer, en vérifiant soigneusement les hypothèses du théorème utilisé, que la fonction $h$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$, puis donner une expression de $h''$ sous forme intégrale.

**2.3.6.** Montrer que, pour tout réel $x>0, h''(x)+h(x)=\frac{1}{x}$.

**2.3.7.** En déduire que pour tout $x>0$ $h(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(s)}{x+s}ds$

**2.4. Application au calcul de l'intégrale de Dirichlet**

O*n reprend ici les notations de la section précédente.*

**2.4.1.** Montrer que, pour tout réel $x>0$,

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant x\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t + x\left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(x+t)}\mathrm{d}t\right|$$

cpge-paradise.com

**2.4.2.** En déduire que pour tout réel $x > 0$,

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

**2.4.3.** Montrer soigneusement que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} h(x) = \frac{\pi}{2}$.

## 3ème Partie

### Application à l'étude de la somme d'une série de fonctions

*On considère la suite* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *de fonctions définies sur l'intervalle* $[0,+\infty[$ *par :*

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [0,+\infty[\,,\ u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

**3.1** Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur l'intervalle $[0,+\infty[$

**3.2.** Montrer que, pour tout $a > 0$, les séries de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} nu_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^2 u_n$ convergent normalement sur l'intervalle $[a,+\infty[$

*Dans la suite de cette partie, on pose* $u(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$, $\quad x \geqslant 0$.

**3.3. Quelques propriétés de la fonction $u$**

**3.3.1.** Montrer, en précisant le théorème utilisé, que la fonction $u$ est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

**3.3.2.** Montrer de même que la fonction $u$ admet 0 pour limite en $+\infty$.

**3.3.3.** Montrer que la fonction $u$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et donner une expression de sa dérivée seconde sous la forme de la somme d'une série de fonctions.

**3.3.4.** Montrer que

$$\forall x > 0, \quad u''(x) + u(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

**3.3.5.** En utilisant les résultats de la première partie du problème, montrer qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x > 0, \quad u(x) = \alpha\cos x + \beta \sin x + \int_1^x \frac{1}{e^t - 1}\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

**3.4. Une autre expression intégrale de la fonction $u$**

**3.4.1.** Montrer que, pour tout $a > 0$, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{e^t-1}$ est intégrable sur l'intervalle $[a,+\infty[$.

**3.4.2.** En déduire que, pour tout $a > 0$, les fonctions $t \longmapsto \frac{1}{e^t-1}\sin t$ et $t \longmapsto \frac{1}{e^t-1}\cos t$ sont intégrables sur l'intervalle $[a,+\infty[$. intégrables sur l'intervalle $[a,+\infty[$.

**3.4.3.** Montrer que, pour tout $x > 0$, $\quad u(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{e^{x+s}-1}\,\mathrm{d}s$.

**3.5.** Justifier que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{e^t-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et montrer, en précisant le théorème utilisé, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

**FIN DE L'ÉPREUVE**