L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI, comporte 3 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants à traiter dans l'ordre souhaité.

Exercice
Un problème d'extremum
(Noté sur 4 points sur 20)

On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

1. Quelques propriétés de la fonction F

1.1. Justifier que la fonction F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2$.

1.2. Montrer que la fonction F admet un unique point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et le déterminer.

2. Étude de la nature du point critique (x_0, y_0)

2.1. Calculer les dérivées partielles secondes de F au point (x_0, y_0).

2.2. À l'aide de la matrice Hessienne, montrer que la fonction F présente un extremum local au point (x_0, y_0). Est-ce un minimum ou un maximum local ?

3. Étude plus approfondie de l'extremum en question

3.1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; on pose $u = x$ et $v = y - 3$. Vérifier que $F(x, y) = u^2 + uv + v^2 - 9$.

3.2. Montrer qu'en fait la fonction F présente un extremum absolu strict au point (x_0, y_0).
On pourra remarquer que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad u^2 + uv + v^2 = \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4}.$$

Problème
Exemples d'utilisation d'équations différentielles en analyse

Notations

Dans ce problème, I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ; on note $(\mathscr{L}_f)$ l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + y = f. \qquad (\mathscr{L}_f)$$

Si $x_0 \in I$, on définit la fonction $\varphi_{f,x_0} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, \quad \varphi_{f,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t) \sin(x - t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans tout le problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles.*

1ère Partie
Expression intégrale des solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$

1.1. Montrer que l'ensemble Σ_0 des solutions, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est un espace vectoriel réel ; préciser sa dimension et en donner une base.

1.2. Recherche d'une solution particulière de $(\mathscr{L}_f)$

Pour tout $x \in I$, on pose $\quad \varphi_1(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\cos t \, \mathrm{d}t \quad$ et $\quad \varphi_2(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\sin t \, \mathrm{d}t$.

1.2.1. Justifier que les fonctions φ_1 et φ_2 sont dérivables sur I et exprimer $\varphi_1'(x)$ et $\varphi_2'(x)$ pour tout $x \in I$.

1.2.2. Montrer que, pour tout $x \in I$, $\quad \varphi_{f,x_0}(x) = \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x$. Que vaut $\varphi_{f,x_0}(x_0)$?

1.2.3. En déduire que φ_{f,x_0} est dérivable sur I et exprimer $\varphi_{f,x_0}'(x)$ pour tout $x \in I$. Que vaut $\varphi_{f,x_0}'(x_0)$?

1.2.4. Montrer que φ_{f,x_0} est deux fois dérivable sur I et qu'elle est solution, sur I, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$.

1.2.5. Montrer que φ_{f,x_0} est l'unique solution, sur I, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ s'annulant ainsi que sa dérivée en x_0.

1.3. Expression intégrale des solutions de $(\mathscr{L}_f)$

Montrer que les solutions, sur I, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \alpha\cos x + \beta\sin x + \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

2ème Partie
Étude de la périodicité des solutions de $(\mathscr{L}_f)$ dans le cas où f est 2π-périodique

Dans cette partie, on suppose que $I = \mathbb{R}$ et que f est 2π-périodique.

2.1. On suppose que l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ possède une solution 2π-périodique g.

2.1.1. Exprimer les coefficients de Fourier trigonométriques de g'' en fonction de ceux de g et en déduire des relations entre les coefficients de Fourier trigonométriques de g et ceux de f.

2.1.2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

2.2. On suppose ici que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0$.

2.2.1. Montrer que, pour tout réel x, $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = 0$.

2.2.2. En déduire, d'abord que la solution $\varphi_{f,0}$ est 2π-périodique, puis justifier qu'il en est de même de toutes les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$.

2.3. Si f est la fonction sinus, l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ possède-t-elle des solutions 2π-périodiques ?

3ème Partie
Application à l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre et au calcul de l'intégrale de Dirichlet

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, dite de DIRICHLET.

3.1. Convergence d'intégrales

3.1.1. Convergence de l'intégrale de DIRICHLET

(i) Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

(ii) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

(iii) Montrer soigneusement que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

3.1.2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ est également convergente.

3.2. Étude de solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ lorsque $I =]0, +\infty[$ et $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$

Dans cette section, on suppose que $I =]0, +\infty[$ et que f est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. On cherche à montrer que l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ admet une unique solution, sur $]0, +\infty[$, ayant 0 pour limite en $+\infty$.

3.2.1. On suppose que ψ est une solution, sur $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ ayant 0 pour limite en $+\infty$.

(i) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x > 0, \quad \psi(x) = \left(\lambda - \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\cos x + \left(\mu + \int_1^x \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\sin x.$$

(ii) Montrer que $\lambda = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et que $\mu = -\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.

On pourra considérer les suites $\left(\psi(2n\pi)\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\psi(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)\right)_{n\geqslant 1}$.

(iii) En déduire que, pour tout $x > 0$, $\psi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t$.

3.2.2. Montrer que la fonction $\psi_1 : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t$ est effectivement solution, sur $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ et qu'elle admet 0 pour limite en $+\infty$.

3.3. Étude d'une fonction définie comme une intégrale dépendant d'un paramètre

3.3.1. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Dans la suite de cette partie, on pose $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \quad x \geqslant 0$.

3.3.2. Calculer $h(0)$.

3.3.3. Montrer, en précisant le théorème utilisé, que la fonction h est continue sur $[0, +\infty[$.

3.3.4. Montrer, en précisant le théorème utilisé, que la fonction h admet 0 pour limite en $+\infty$.

3.3.5. Montrer, en vérifiant soigneusement les hypothèses du théorème utilisé, que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, puis donner une expression de h'' sous forme intégrale.

3.3.6. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\quad h''(x) + h(x) = \dfrac{1}{x}$.

3.3.7. En déduire que pour tout $x > 0$, $\quad h(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{x+s}\,\mathrm{d}s$.

3.4. Application au calcul de l'intégrale de Dirichlet

On reprend ici les notations de la section précédente.

3.4.1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$,

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant x \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t + x\left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(x+t)}\,\mathrm{d}t\right|.$$

3.4.2. En déduire que pour tout réel $x > 0$,

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

3.4.3. Montrer soigneusement que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} h(x) = \frac{\pi}{2}$.

FIN DE L'ÉPREUVE