L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 3 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants à traiter dans l'ordre souhaité.

Exercice

Probabilité qu'une matrice soit diagonalisable

(Noté sur 4 points sur 20)

Dans cet exercice, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

1.1. Étude de la diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et on pose $A=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$.

1.1.1. Justifier que si $\alpha\neq\beta$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.2. Montrer que si $\alpha=\beta$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.2. Calcul de la probabilité qu'une matrice aléatoire soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cette section, X et Y désignent deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et suivant une loi géométrique de paramètres respectifs p_1 et p_2, avec $(p_1,p_2)\in]0,1[^2$; c'est-à-dire

$$X\hookrightarrow\mathcal{G}(p_1)\quad\text{et}\quad Y\hookrightarrow\mathcal{G}(p_2).$$

1.2.1. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, rappeler l'expression de la probabilité $\mathbb{P}(X=k)$ en fonction de k et p_1.

1.2.2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U=X+Y$ selon les valeurs des paramètres p_1 et p_2. *On précisera d'abord l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire U.*

1.2.3. Montrer que la variable aléatoire $V=\min(X,Y)$ suit une loi géométrique de paramètre $(1-p_1)(1-p_2)$. *On pourra commencer par calculer $\mathbb{P}(V>k)$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.*

X **1.2.4.** Montrer que $\mathbb{P}(X<Y)=\dfrac{p_1(1-p_2)}{p_1+p_2-p_1p_2}$.

1.2.5. On considère la variable aléatoire discrete $M:\Omega\longrightarrow\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, définie sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ par :

$$\forall\, w\in\Omega,\quad M(w)=\begin{pmatrix}X(w) & 1\\ 0 & Y(w)\end{pmatrix}.$$

Calculer, en fonction des paramètres p_1 et p_2, la probabilité que la matrice M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Problème

Calcul de la distance d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ au groupe orthogonal euclidien $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Définitions et rappels

Dans tout ce problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et n un entier naturel **supérieur ou égal à** 2. Si $p\in\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes. Si $p=n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A et $\operatorname{rg}(A)$ son rang ; si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\operatorname{Tr}(A)$ la trace de A et $\det A$ son déterminant.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par :

$$\forall (X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2, \quad <X,Y> = {}^tXY.$$

On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal euclidien et on rappelle que

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ {}^tMM = I_n \right\}.$$

1ère Partie
Quelques résultats préliminaires

On rappelle qu'une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *positive* si elle vérifie :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geqslant 0.$$

1.1. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors la matrice ${}^tMM$ est symétrique et positive.

1.2. On considère une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs.

1.2.1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1, \dots, x_n$. Exprimer le scalaire ${}^tXDX$ à l'aide de $d_1, \dots, d_n$ et $x_1, \dots, x_n$.

1.2.2. En déduire que la matrice symétrique D est positive.

1.3. Caractérisation de la positivité d'une matrice symétrique par le signe de ses valeurs propres

1.3.1. Montrer que si une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive, alors ses valeurs propres sont positives.

1.3.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

(i) Justifier qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tP\,DP = A$.

(ii) En déduire que si les valeurs propres de A sont positives, alors A est une matrice positive.

1.4. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs, et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tP\,({}^tBB)P = \Delta$.

1.5. Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $(A,B) \longmapsto \operatorname{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on notera $\|.\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire.

2ème Partie
Décomposition polaire d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on note $A_1, A_2, \dots, A_n$ les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui forment les colonnes de A et on suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs, telle que ${}^tAA = D^2$.

2.1.1. Montrer que, pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, ${}^tA_iA_j = d_i^2\,\delta_{i,j}$, avec $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. Que vaut A_i lorsque $d_i = 0$?

2.1.2. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(E_1, \dots, E_n)$ de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), <,>)$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $A_i = d_i\,E_i$.

2.1.3. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale E de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = ED$.

2.2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.2.1. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs, et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tP\,{}^tBBP = D^2$.

2.2.2. Montrer alors qu'il existe une matrice $E \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $BP = ED$, puis en déduire qu'il existe une matrice orthogonale O et une matrice S symétrique positive, toutes deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $B = OS$.

2.3. Application

On pose $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $O \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, symétrique et positive, telles que $C = OS$.

3ème Partie
Application à un calcul de distance

On rappelle que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|.\|_2$ associée au produit scalaire $(A, B) \longmapsto \operatorname{Tr}({}^tAB)$ et que

$$\forall (M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad \operatorname{Tr}(MN) = \operatorname{Tr}(NM).$$

3.1. On rappelle que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ {}^tMM = I_n\right\}$.

3.1.1. Montrer que l'application $M \longmapsto {}^tM$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est continue.

3.1.2. Montrer que l'application $M \longmapsto {}^tMM$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est continue.

3.1.3. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

~ *Dans la suite de cette partie, on se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on cherche à calculer la distance*

$$d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|_2.$$

3.2. Justifier que cette borne inférieure est atteinte. compacte.

3.3. Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|\Omega A\|_2 = \|A\Omega\|_2 = \|A\|_2$.

3.4. Soient $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *symétrique et positive* telles que $A = OS$.

3.4.1. Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A - \Omega\|_2 = \|S - O^{-1}\Omega\|_2$ et en déduire que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

3.4.2. On note D une matrice diagonale et P une matrice orthogonale telles que $S = PDP^{-1}$. Justifier l'existence des matrices D et P puis montrer que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

3.5. On conserve les notations de la question **3.4.** précédente et on pose $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

3.5.1. Justifier que les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont $\geqslant 0$.

3.5.2. Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{Tr}(D\Omega) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.

3.5.3. Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|D - \Omega\|_2^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 - 2\operatorname{Tr}(D\Omega) + n$.

3.5.4. Conclure que $d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|_2$ puis que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - O\|_2$.

3.6. Application

Calculer $d(C, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$ où C est la matrice définie par $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

FIN DE L'ÉPREUVE