cpge-paradise.com

Concours National Commun
Épreuve de Mathématiques 2
Session 2023 - Filière MP

L'usage de tout matériel électronique, y compris La calculatrice, est interdit

Durée : 4 heures

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Exercice

Probabilité qu'une matrice soit diagonalisable

(Noté 4 points sur 20)

Dans cet exercice, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

1.1. Étude de la diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

1.1.1. Justifier que si $\alpha \neq \beta$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.2. Montrer que si $\alpha = \beta$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.2. Calcul de la probabilité qu'une matrice aléatoire soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cette section, X et Y désignent deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant une loi géométrique de paramètres respectifs p_1 et p_2, avec $(p_1, p_2) \in]0,1[^2$; c'est-à-dire

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2)$$

1.2.1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, rappeler l'expression de la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de k et p_1.

1.2.2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = X + Y$ selon les valeurs des paramètres p_1 et p_2.

On précisera d'abord l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire U.

1.2.3. Montrer que la variable aléatoire $V = \min(X, Y)$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$.

On pourra commencer par calculer $P(V > k)$, pour tout $k \in N^*$.

1.2.4. Montrer que $\mathbb{P}(X < Y) = \dfrac{p_1(1 - p_2)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$.

1.2.5. On considère la variable aléatoire discrete $M : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}.$$

Calculer, en fonction des paramètres p_1 et p_2, la probabilité que la matrice M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

cpge-paradise.com

Problème

Calcul de la distance d'une matrice de $\mathcal{M}_n(R)$ au groupe orthogonal euclidien $\mathcal{O}_n(R)$

Définitions et rappels

Dans tout ce problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et n un entier naturel **supérieur ou égal à 2**. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes. Si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n.
Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^t A$ désigne la matrice transposée de A et rg (A) son rang ;
si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\operatorname{Tr}(A)$ la trace de A et $\det A$ son déterminant.
On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par :

$$\forall (X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2, \quad <X,Y>= {}^tXY$$

On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal euclidien et on rappelle que

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ {}^tMM = I_n\right\}$$

1ère Partie

Quelques résultats préliminaires

On rappelle qu'une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si elle vérifie :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geqslant 0.$$

1.1. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors la matrice ${}^tMM$ est symétrique et positive.

1.2. On considère une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs.

1.2.1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1, \dots, x_n$. Exprimer le scalaire ${}^tXDX$ à l'aide de $d_1, \dots, d_n$ et $x_1, \dots, x_n$.

1.2.2. En déduire que la matrice symétrique D est positive.

1.3. Caractérisation de la positivité d'une matrice symétrique par le signe de ses valeurs propres

1.3.1. Montrer que si une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive, alors ses valeurs propres sont positives.

1.3.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

i) Justifier qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tPDP = A$.

ii) En déduire que si les valeurs propres de A sont positives, alors A est une matrice positive.

1.4. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs, et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tP\,({}^tBB)\,P = \Delta$.

cpge-paradise.com

1.5. Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $(A, B) \longmapsto \operatorname{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on notera $\|\cdot\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire.

2

$2^{\text{ème}}$ Partie

Décomposition polaire d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on note $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui forment les colonnes de A et on suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs, telle que ${}^tAA = D^2$.

2.1.1. Montrer que, pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2, {}^t A_i A_j = d_i^2 \delta_{i,j}$, avec $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.

Que vaut A_i lorsque $d_i = 0$?

2.1.2. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(E_1, \ldots, E_n)$ de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle\ .\rangle)$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}, A_i = d_i E_i$.

2.1.3. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale E de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = ED$.

2.2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.2.1. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs, et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tP\,.{}^tBB.P = D^2$.

2.2.2. Montrer alors qu'il existe une matrice $E \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $BP = ED$, puis en déduire qu'il existe une matrice orthogonale O et une matrice S symétrique positive, toutes deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $B = OS$.

2.3. Application

On pose $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $O \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, symétrique et positive, telles que $C = OS$

$3^{\text{ème}}$ Partie

Application à un calcul de distance

On rappelle que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$ associée au produit scalaire $(A, B) \longmapsto \operatorname{Tr}(\,{}^tAB)$ et que

$$\forall (M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad \operatorname{Tr}(MN) = \operatorname{Tr}(NM)$$

cpge-paradise.com

3.1. On rappelle que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ {}^tMM = I_n\}$

3.1.1. Montrer que l'application $M \longmapsto {}^tM$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est continue.

3.1.2. Montrer que l'application $M \longmapsto {}^tMM$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est continue.

3.1.3. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans la suite de cette partie, on se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on cherche à calculer la distance

$$d\left(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) = \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|_2$$

3.2. Justifier que cette borne inférieure est atteinte.

3.3. Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|\Omega A\|_2 = \|A\Omega\|_2 = \|A\|_2$.

3.4. Soient $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et positive telles que $A = OS$.

3.4.1. Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A - \Omega\|_2 = \left\|S - O^{-1}\Omega\right\|_2$ et en déduire que $d\left(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) = d\left(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right)$

3.4.2. On note D une matrice diagonale et P une matrice orthogonale telles que $S = PDP^{-1}$. Justifier l'existence des matrices D et P puis montrer que $d\left(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) = d\left(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right)$.

3.5. On conserve les notations de la question 3.4. précédente et on pose $D = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$.

3.5.1. Justifier que les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont $\geqslant 0$.

3.5.2. Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\quad \operatorname{Tr}(D\Omega) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$.

3.5.3. Montrer que, pour toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\quad \|D - \Omega\|_2^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2 - 2\operatorname{Tr}(D\Omega) + n$.

3.5.4. Conclure que $d\left(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) = \|D - I_n\|_2$ puis que $d\left(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) = \|A - O\|_2$.

3.6. Application Calculer $d\left(C, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})\right)$ où C est la matrice définie par $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

FIN DE L'ÉPREUVE