L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI, comporte 3 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé de trois exercices indépendants à traiter dans l'ordre souhaité.

Exercice 1

Probabilité qu'une matrice soit diagonalisable

(Noté sur 4 points sur 20)

Dans cet exercice, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

1.1. Étude de la diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

1.1.1. Justifier que si $\alpha \neq \beta$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.2. Montrer que si $\alpha = \beta$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.2. Calcul de la probabilité qu'une matrice aléatoire soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cette section, X et Y désignent deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant une loi géométrique de paramètres respectifs p_1 et p_2, avec $(p_1, p_2) \in]0,1[^2$; c'est-à-dire

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2).$$

1.2.1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, rappeler l'expression de la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de k et p_1.

1.2.2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = X + Y$ selon les valeurs des paramètres p_1 et p_2. *On précisera d'abord l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire U.*

1.2.3. Montrer que la variable aléatoire $V = \min(X, Y)$ suit une loi géométrique de paramètre $(1 - p_1)(1 - p_2)$. *On pourra commencer par calculer $\mathbb{P}(V > k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.*

1.2.4. Montrer que $\mathbb{P}(X < Y) = \dfrac{p_1(1 - p_2)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$.

1.2.5. On considère la variable aléatoire discrete $M : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\forall\, w \in \Omega, \quad M(w) = \begin{pmatrix} X(w) & 1 \\ 0 & Y(w) \end{pmatrix}.$$

Calculer, en fonction des paramètres p_1 et p_2, la probabilité que la matrice M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

Dans ce problème, E désigne l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel n, E_n désigne sous-espace vectoriel de E formé des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

On note Φ l'application de E vers E définie par :

$$\forall\, P \in E, \quad \Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'.$$

2.1. Linéarité de Φ

2.1.1. Vérifier que Φ est une application linéaire.

2.1.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace vectoriel E_n de E est stable par Φ.

Dans la suite, on note Φ_n l'endomorphisme de E_n induit par Φ.

On pose $\varepsilon_0 = 1$, et pour tout entier naturel non nul k, on pose $\varepsilon_k = X^k$. On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{B}_n = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E_n, c'est sa base canonique.

2.1.3. Calculer $\Phi(\varepsilon_0)$, $\Phi(\varepsilon_1)$ et $\Phi(\varepsilon_k)$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

2.2. Étude de l'endomorphisme Φ_3

2.2.1. Écrire la matrice A_3 de l'endomorphisme Φ_3 relativement à la base $\mathcal{B}_3$.

2.2.2. Quelles sont les valeurs propres de la matrice A_3 ?

2.2.3. L'endomorphisme Φ_3 est-il diagonalisable ?

. Pour tout entier naturel non nul n, on considère le polynôme $U_n = (X^2-1)^n$ et on note P_n le polynôme dérivé n−ième du polynôme U_n, c'est-à-dire $P_n = U_n^{(n)}$. On convient enfin que $\boxed{U_0 = P_0 = 1.}$

2.3.1. Établir que, pour tout entier naturel n, $(X^2-1)U_n' - 2nXU_n = 0$.

2.3.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant $(n+1)$ fois les deux membres de la relation précédente, montrer que

$$\Phi(P_n) = n(n+1)P_n.$$

2.3.3. Montrer alors que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E_n, formée de vecteurs propres de Φ_n. Que peut-on conclure sur Φ_n ?

2.4. Soit $P \in E$ un polynôme non nul, de degré p et dont le coefficient dominant est noté α_p, $p \in \mathbb{N}$. Soit enfin $n \in \mathbb{N}$.

2.4.1. Montrer que si $\Phi(P) = n(n+1)P$, alors $p = n$.

2.4.2. Ici on prend $p = n$, on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ et on suppose que $\Phi(P) = n(n+1)P$.

(i) Établir que $\alpha_{n-1} = 0$ et trouver une relation entre α_k et α_{k+2}, pour tout $k \in \{0, \dots, n-2\}$.

(ii) En déduire, sans les calculer, que tous les coefficients non nul de P s'expriment à l'aide de α_n.

2.4.3. Que peut-on alors dire de la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}\big(\Phi - n(n+1)\mathrm{id}_E\big)$? Ce résultat était-il prévisible sans calcul ?

Exercice 3

À propos d'endomorphisme symétriques d'un espace vectoriel euclidien

Définitions et notations

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 2$ muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$; la norme euclidienne sur E associée à ce produit scalaire est notée $\|.\|$.

On rappelle qu'un endomorphisme f de E est dit *symétrique* si

$$\forall\,(x,y) \in E^2, \quad (f(x)|y) = (x|f(y)).$$

Un endomorphisme symétrique de E est dit *positif* si, pour tout $x \in E$, $(f(x)|x) \geqslant 0$.

On note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E et $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ formé des endomorphismes symétriques de E.

Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se notera I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A et $\mathrm{rg}(A)$ son rang. Si $p = n$, $\mathrm{Sp}(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres réelles de A, $\mathrm{Tr}\,(A)$ sa trace et P_A son polynôme caractéristique ; il est défini par :

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{R}, \quad P_A(\lambda) = \det(\lambda\, I_n - A).$$

3.1. Soit $v \in E$; on définit l'application $f_v : x \mapsto (v|x)\, v$.

3.1.1. Montrer que f_v est un endomorphisme symétrique et positif de E.

3.1.2. Préciser le rang de f_v.

3.1.3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E ; on note $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice formée des coordonnées du vecteur v dans cette base. Exprimer la matrice de f_v dans la base $\mathcal{B}$ en fonction de V.

3.1.4. Reconnaître f_v lorsque $\|v\| = 1$.

3.2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les vecteurs v et w de E pour que f_v soit égal à f_w.

Dans la suite, on considère un vecteur unitaire u de E et on note p l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall\, x \in E,\ p(x) = (u|x)u.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha = id_E + \alpha p$.

3.3. Étude de l'endomorphisme p

3.3.1. Déterminer $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ et les exprimer moyennant le vecteur u. Préciser la nature de p.

3.3.2. Justifier que p est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres ainsi que les sous-espaces propres associés.

3.4. Étude de l'endomorphisme f_α

3.4.1. Quelle condition doit vérifier α pour que f_α soit un automorphisme de E ?

3.4.2. On note $G = \{f_\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \neq -1\}$. Déterminer les éléments de G qui sont des endomorphismes orthogonaux de E en précisant la nature de chacun d'entre eux.

3.5. Étude de l'endomorphisme f_α lorsque $\alpha \neq 0$

On suppose ici que α est non nul. Justifier que f_α est diagonalisable et préciser ses valeurs propres ainsi que les sous-espaces propres associés, puis déterminer le polynôme caractéristique P_{f_α} de f_α.

3.6. Soient a et b deux réels non nuls, et g l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}_E$ est $aI_n + bJ_n$, où J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

3.6.1. Déterminer toutes les matrices colonnes $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $J_n = nV\,{}^tV$.

3.6.2. Exprimer l'endomorphisme g en fonction de $f_{\frac{nb}{a}}$ puis déterminer les valeurs propres ainsi que le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres de la matrice $aI_n + bJ_n$.

3.7. Étude des endomorphismes symétriques de E

Soit f un endomorphisme symétrique de E.

3.7.1. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{e_i}.$$

Que représentent pour f les λ_i et les e_i ?

3.7.2. Montrer que $f = 0$ si, et seulement si, pour tout $x \in E$, $(x|f(x)) = 0$.

3.8. On suppose f positif et on considère $x \in E$. Montrer que $f(x) = 0$ si, et seulement si, $(x|f(x)) = 0$.

3.9. Caractérisation des endomorphismes symétriques positifs de E

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

3.9.1. Montrer que f est symétrique positif si et seulement s'il existe un n-uplet $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E tel que $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_{u_i}$.

3.9.2. On suppose que f est symétrique et positif. Montrer que $\operatorname{rg}(f) = 1$ si et seulement s'il existe $u \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f = f_u$.

FIN DE L'ÉPREUVE