Corrigé CNC 2023 - MATH 2 - MP.

PAR SABIR ILYASS - ETTOUSY BADR.

Si vous trouvez des erreurs de français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-nous un mail à:
ilyasssabir7@gmail.com ou **badrettousy26@gmail.com**

20 Mai 2023.

1 Exercice

1.1.1 Si $\alpha \neq \beta$, Il suffit de montrer que $(X-\alpha)(X-\beta)$ annule A, avec $(X-\alpha)(X-\beta)$ est un polynôme à racines simples, donc A est diagonalisble dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.2 Si $\alpha = \beta$, Supposons par l'absurde que A est diagonalisable, Puisque le polynôme caractéristique de A est $(X-\alpha)^2$, alors d'après le théorème de Cayley-Hamilton, il existe $r=1,2$ tel que le polynôme minimal de A veut: $\pi_A = (X-\alpha)^r$.

Or A est diagonalisable, alors π_A est scindé à racines simples, donc $\pi_A = X-\alpha$.

Ainsi $A - \alpha I_n = 0$, Ansurde avec A n'est pas diagonale.

D'où le résultat.

1.2.1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = p_1(1-p_1)^{k-1}$.

1.2.2 $U = X+Y$.

On a $U(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Et pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U=k) &= \mathbb{P}(X+Y=k) \\
&= \sum_{k=1}^{k-1} \mathbb{P}(X+Y=k, X=j) \\
&= \sum_{k=1}^{k-1} \mathbb{P}(Y=k-j, X=j)
\end{aligned}$$

Par indépendance de X et Y, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U=k) &= \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(Y=k-j)\mathbb{P}(X=j) \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} p_2(1-p_2)^{k-j-1} p_1(1-p_1)^{j-1} \\
&= p_1p_2(1-p_2)^k \frac{1}{(1-p_2)^2} \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^{j-1} \\
&= \begin{cases} (k-1)\, p_1p_2(1-p_2)^{k-2} \text{ si } p_1 = p_2 \\ p_1p_2(1-p_2)^k \frac{1}{(1-p_2)^2} \times \frac{1-\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^{k-1}}{1-\frac{1-p_1}{1-p_2}} \text{ si } p_1 \neq p_2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (k-1)\, p_1p_2(1-p_2)^k \text{ si } p_1 = p_2 \\ p_1p_2 \times \frac{(1-p_2)^{k-1} - (1-p_1)^{k-1}}{p_1 - p_2} \text{ si } p_1 \neq p_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

1.2.3 $V = \min(X, Y)$.

On a $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V > k) &= \mathbb{P}(X > k, Y > k)\\ &= \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(Y > k)\\ &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} p_1(1-p_1)^j \sum_{j=k+1}^{+\infty} p_2(1-p_2)^j\\ &= p_1p_2[(1-p_1)(1-p_2)]^{k+1}\frac{1}{p_1p_2}\\ &= [(1-p_1)(1-p_2)]^{k+1}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V = k) &= \mathbb{P}(V > k-1) - V(V > k)\\ &= [(1-p_1)(1-p_2)]^k - [(1-p_1)(1-p_2)]^{k+1}\\ &= [(1-p_1)(1-p_2)]^k(1-(1-p_1)(1-p_2))\end{aligned}$$

Ainsi V suit la loi $\mathcal{G}((1-p_1)(1-p_2))$.

1.2.4

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < Y) &= \sum_{j=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X < Y, X = j)\\ &= \sum_{j=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Y > j, X = j)\\ &= \sum_{j=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X = j)\mathbb{P}(Y > j)\\ &= \sum_{j=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X = j)\sum_{k=j+1}^{+\infty}\mathbb{P}(Y = k)\\ &= p_1p_2\sum_{j=1}^{+\infty}(1-p_1)^{j-1}\sum_{k=j+1}^{+\infty}(1-p_2)^{k-1}\\ &= p_1\sum_{j=1}^{+\infty}(1-p_1)^{j-1}(1-p_2)^j\\ &= p_1(1-p_2)\sum_{j=1}^{+\infty}[(1-p_1)(1-p_2)]^{j-1}\\ &= \frac{p_1(1-p_2)}{1-(1-p_1)(1-p_2)}\\ &= \frac{p_1(1-p_2)}{p_1+p_2-p_1p_2}\end{aligned}$$

1.2.5 D'après les questions 1.1.1 et 1.1.2, on a p: la probabilité que M soit diagonalisble est:

$$\begin{aligned}p &= \mathbb{P}(X \neq Y)\\ &= \mathbb{P}(X < Y) + \mathbb{P}(Y < X)\end{aligned}$$

D'après la question précédente et par symétrie, on a

$$\begin{aligned} p &= \frac{p_1(1-p_2)}{p_1+p_2-p_1p_2}+\frac{p_2(1-p_1)}{p_1+p_2-p_1p_2} \\ &= \frac{p_2+p_1-2p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2} \\ &= 1-\frac{p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2} \end{aligned}$$

Problème

Calcul de la distance d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

au groupe orthogonal euclidien $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

$1^{\text{ère}}$Partie

Quelques résultats préliminaires

1.1 Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On a ${}^t({}^tMM)={}^tMM$, donc ${}^tMM$ est symétrique et pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} {}^tX{}^tMMX &= <MX,MX> \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

D'où ${}^tMM$ est positive.

1.2.1 Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$${}^tXDX = \sum_{k=1}^{n} d_k x_k^2$$

1.2.2 On a ${}^tXDX=\sum\limits_{k=1}^{n} d_k x_k^2\geqslant 0$ (car $d_1,\ldots,d_n\geqslant 0$).

D'où D est positive.

1.3.1 Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ une valeur propore (l'existence d'une valeur propre est assuré par le théorème spectral) et X un vecteur propre de non nul de D associé à λ. On a

$${}^tXDX=\lambda<X,X>\geqslant 0$$

Avec $<X,X>>0$ (car X est non nul) alors $\lambda\geqslant 0$.

1.3.2 Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique

1.3.2.i D'après le théorème spectral

1.3.2.i Si les valeurs propores de A sont positives, alors pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= {}^tX\,{}^tPDPX \\ &= {}^t(PX)D\,(PX) \end{aligned}$$

D'après la question 1.2.2 D est positive, alors ${}^t(PX)D\,(PX)\geqslant 0$.

Ainsi ${}^tXAX \geqslant 0$.

D'où le résultat.

1.4 Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

On a ${}^tBB$ est symétrique positive (c.f question 1.1), donc d'après les questions 1.3.2.i et 1.3.2.ii on a l'existence de $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à termes positifs et une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$${}^tBB = {}^tQ\Delta Q$$

Pour $P = {}^tQ$, on a le résultat.

1.5 On a pour pour tout $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\varphi(A,B) &= \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{AB}) \\ &= \mathrm{Tr}({}^t({}^t\mathrm{AB})) \\ &= \mathrm{Tr}(A{}^tB) \\ &= \mathrm{Tr}({}^tBA) \\ &= \varphi(B,A)\end{aligned}$$

Donc φ est symétrique.

$$\begin{aligned}\varphi(A+\lambda B, C) &= \mathrm{Tr}({}^t(A+\lambda B)C) \\ &= \mathrm{Tr}({}^tAC) + \lambda \mathrm{Tr}({}^tBC) \\ &= \varphi(A,C) + \lambda\varphi(B,C)\end{aligned}$$

Par symétrie, φ est bilinéaire.

Et

$$\varphi(A,A) = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \geqslant 0$$

Avec $\varphi(A,A) = 0$ si et seulement si $a_{i,j} = 0$ pour tout $i, j \in [\![1,n]\!]^2$ si et seulement si $A = 0$.

Ainsi φ est positif et définie.

D'où le résultat.

$\mathbf{2^{\text{ème}}}$ Partie

Décomposition polaire d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2.1.1 Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, notons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ on a

$${}^tA_iA_j = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = ({}^tAA)_{i,j} = d_i^2\delta_{i,j}.$$

2.1.2 Posons pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $d_i \neq 0$, $E_i = \frac{1}{\sqrt{d_i}}A_i$.

Notons $\mathfrak{A} = \{i \in [\![1,n]\!], d_i \neq 0\}$

Si A est nulle, toute base orthonormée convient, supposons dans la suite de cette question que A est non nulle.

On a pour tout $i,j\in\mathfrak{A}$ $<E_i,E_j>=\delta_{i,j}$.

Donc $(E_i)_{i\in\mathfrak{A}}$ est une famille orthonormée, donc il existe $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]\backslash\mathfrak{A}}$ tel que $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

On a pour tout $i\in[\![1,n]\!]\backslash\mathfrak{A}$, ${}^tA_iA_i=0$, donc $A_i=0$.

Ainsi $A_i=d_iE_i$.

Par suite pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ $A_i=d_iE_i$.

D'où le résultat.

2.1.3 Posons E la matrice formée par les lignes $E_1,\dots,E_n$.

Puisque $(E_1,\dots,E_n)$ est orthonormée alors E est orthogonale.

On a pour tout $i,j\in[\![1,n]\!]$, on a

$$(ED)_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}E_{i,k}d_j\delta_{k,j}=d_jE_{i,j}=(A_j)_{i,1}=a_{i,j}.$$

D'où $A=ED$.

2.2.1 On a d'après 1.4, il existe $\Delta=\operatorname{diag}(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à termes positifs et une matrice orthogonale $P\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tP{}^tBBP=\Delta$.

On pose $D=\operatorname{diag}\left(\sqrt{\beta_1},\dots,\sqrt{\beta_n}\right)$. On a ${}^tP{}^tBBP=D^2$.

2.2.2 Notons $A=PB$, on a ${}^tAA=D^2$, donc d'après la question 2.1.3, on a l'existence de $E\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale tel que $A=ED$, ainsi $PB=ED$.

On a $B=EDP^{-1}$.

Posons $O=EP^{-1}$ qui est une matrice orthogonale comme produit de deux matrices orthogonales et on a $B=OPDP^{-1}$.

Posons $S=PDP^{-1}$est symétrique et positive (car D à termes positifs).

D'où le résultat.

2.3 Après calcul on trouve

$$O=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Et

$$S=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$3^{\text{ème}}$Partie

Application à calcul de distance

3.1.1 $M\longmapsto{}^tM$ est linéaire, en dimension finie, donc elle est continue.

3.1.2 $M \longmapsto {}^t MM$ est le produit de deux applications continuent ($M \longmapsto {}^t M$ et $M \longmapsto M$) donc elle est continue.

3.1.3 $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de $\{I_n\}$ par l'application $M \longmapsto {}^t MM$, puisque $\{I_n\}$ est fermée alors $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermée.

On a pour tout $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\|{}^t MM\|_2 = n$ donc $\mathcal{O}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$ est bornée.

D'où le résultat.

3.2 $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermée bornée, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact.

Par la continuité de l'application $M \longmapsto A - M$ (car elle est 1-lipschitzienne).

Alors $M \longmapsto A - M$ est bornée et atteint ses bornes sur $\mathcal{O}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$.

D'où le résultat.

3.3 Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, On a

$$\begin{aligned}
\|\Omega A\|_2^2 &= \mathrm{Tr}({}^t(\Omega A)\Omega A)\\
&= \mathrm{Tr}({}^t A {}^t\Omega \Omega A)\\
&= \mathrm{Tr}({}^t A A)\\
&= \|A\|_2^2
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\|A\Omega\|_2^2 &= \mathrm{Tr}({}^t(A\Omega)A\Omega)\\
&= \mathrm{Tr}({}^t\Omega {}^t A A\Omega)\\
&= \mathrm{Tr}({}^t A A)\\
&= \|A\|_2^2
\end{aligned}$$

3.4.1 On a

$$\begin{aligned}
\|A - \Omega\|_2^2 &= \|OS - \Omega\|_2^2\\
&= \|O\,(S - O^{-1}\Omega)\|_2^2\\
&= \|S - O^{-1}\Omega\|_2^2
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) &= \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|_2\\
&= \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|S - O^{-1}M\|_2
\end{aligned}$$

Avec $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, alors $\{O^{-1}M, M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\} = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,

Alors

$$\begin{aligned}
d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) &= \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|S - M\|_2\\
&= d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))
\end{aligned}$$

3.4.2 L'existence de P et D est un résultat du théorème spectral.

Et on a

$$\begin{aligned} d(A,\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) &= d(S,\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \\ &= \inf_{M\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|S-M\|_2 \\ &= \inf_{M\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|PDP^{-1}-M\|_2 \\ &= \inf_{M\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|D-P^{-1}MP\|_2 \\ &= \inf_{M\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|D-M\|_2 \\ &= d(D,\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

3.5.1 On a S est une matrice symétrique positive, donc d'après la question 1.3.1, on $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \geqslant 0$.

3.5.2 Soit $\Omega=(\omega_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(D\Omega) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\delta_{i,j}\omega_{j,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\omega_{i,i} \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_i\right)\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\omega_{i,i}| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_i \end{aligned}$$

puisque les colonnes de Ω forment une base orthonormée, donc pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ $\sum_{j=1}^{n}\omega_{i,j}^2=1$, alors $\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\omega_{i,i}|\leqslant 1$.**3.5.3** Soit $\Omega\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \|D-\Omega\|_2^2 &= \mathrm{Tr}({}^t(D-\Omega)(D-\Omega)) \\ &= \mathrm{Tr}({}^tDD)-\mathrm{Tr}({}^tD\Omega)-\mathrm{Tr}({}^t\Omega D)+\mathrm{Tr}({}^t\Omega\Omega) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2-2\mathrm{Tr}(\Omega D)+\mathrm{Tr}(I_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2-2\mathrm{Tr}(\Omega D)+n \end{aligned}$$

3.5.4 On a

$$\begin{aligned} d(D,\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) &= \inf_{\Omega\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2-2\mathrm{Tr}(\Omega D)+n\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2+n-2\sup_{\Omega\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}\mathrm{Tr}(\Omega D) \end{aligned}$$

Et on a d'après la question précédente pour tout $\Omega\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ $\mathrm{Tr}(D\Omega)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k$, avec égalité pour $\Omega=I_n$.

Donc $\sup_{\Omega\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}\mathrm{Tr}(\Omega D)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
d(D,\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) &= \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 + n - 2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - 1)^2 \\
&= \mathrm{Tr}({}^t(D-I_n)(D-I_n)) \\
&= \|D-I_n\|_2^2
\end{aligned}$$

Ainsi

$$d(A,\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D,\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D-I_n\|_2^2 = \|P^{-1}(D-I_n)\,P\|_2^2 = \|S-I_n\|_2^2 = \|SO-O\|_2^2 = \|A-O\|_2^2$$

3.6 On a d'après la question 2.3 et la question 3.5.4, on a par calcul

$$O = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$S = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
d(C,\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) &= \|C-O\|_2 \\
&= \sqrt{33}
\end{aligned}$$