Concours commun Mines et Ponts 2023

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 1- MP

m.laamoum@gmail.com

Théorème de stabilité de Liapounov

A. Etude d'une norme sur $\mathscr{L}(E)$

Soit u un endomorphisme de E.

1 ▷ • u est continue car elle est linéaire en dimension finie, donc il existe $M \geq 0$ telle que pour tout x dans E on a $\|u(x)\| \leq M\|x\|$, par suite l'ensemble $\left\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E, x \neq 0\right\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc elle admet une borne supérieure, d'où l'existence de $\sup\limits_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$.

- On a $\{\|u(x)\|, x \in E, \|x\| = 1\} \subset \left\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E, x \neq 0\right\}$ et si $x \neq 0$ alors $\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \|u(\frac{x}{\|x\|})\| \in \{\|u(x)\|, x \in E, \|x\| = 1\}$ donc $\left\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E, x \neq 0\right\} \subset \{\|u(x)\|, x \in E, \|x\| = 1\}$.
Ce qui donne $\left\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \neq 0\right\} = \{\|u(x)\|, \|x\| = 1\}$ et

$$\sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|u(x)\|.$$

2 ▷ Soit u, v dans $\mathscr{L}(E)$.

- On a

$$\begin{aligned} |||u||| = 0 &\iff \sup_{x\neq 0} \tfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = 0 \\ &\iff \forall x \neq 0, \tfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = 0 \\ &\iff \forall x, \|u(x)\| = 0 \\ &\iff u = 0 \end{aligned}$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$, on a $\frac{\|\lambda u(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq |\lambda|\ |||u|||$, donc $|||\lambda u||| \leq |\lambda|\ |||u|||$.

Si $\lambda \neq 0$ alors $|||u||| = |||\frac{1}{\lambda}\lambda u||| \leq \frac{1}{|\lambda|}|||\lambda u|||$ et $|\lambda|\ |||u||| \leq |||\lambda u|||$, inégalité est vérifiée pour $\lambda = 0$.
D'où et $|||\lambda u||| = |\lambda|\ |||u|||$ pour tout λ dans $\mathbb{R}$.

- Soit $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\|(u+v)(x)\|}{\|x\|} &= \frac{\|u(x)+v(x)\|}{\|x\|} \\ &\leq \frac{\|u(x)\|+\|v(x)\|}{\|x\|} \\ &\leq \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} + \frac{\|v(x)\|}{\|x\|} \\ &\leq |||u||| + |||v||| \end{aligned}$$

d'où : $|||u+v||| \leq |||u||| + |||v|||$.

Ainsi $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathscr{L}(E)$.

3 ▷ De la définition on déduit que : $\| u(x)\| \leq |||u|||.\|x\|$ pour tout x.

Soient u et v deux endomorphisme de E on a pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \|uv(x)\| &= \|u(v(x))\| \\ &\leq |||u|||.\|v(x)\| \\ &\leq |||u|||.|||u|||.\|x\| \end{aligned}$$

ce qui donne : $|||uv||| = \sup\limits_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|uv(x)\|}{\|x\|} \leq |||u|||.|||v|||$.

Par récurrence on a pour tout entier naturel k , $|||u^k||| \leq |||u|||^k$.

B. Etude de la stabilité en 0 du système linéaire

Dans cette partie, a désigne un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

4 ▷ Le polynôme caractéristique de a est scindé sur $\mathbb{C}$, il s'écrit $\chi_a = \prod\limits_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}$ et pour tout $i \in \{1,2,...,r\}$ posons $E_i = \ker(a-\lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^{m_i}$.

Les polynômes $(X-\lambda_i)^{m_i}$ sont deux à deux premiers entre eux , le théorème de décomposition des noyaux donne

$$\ker \chi_a(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(a-\lambda_i id_E)^{m_i}$$

d'après le théorème de Cayley-Hamilton on a $\chi_a(a) = 0$ donc $\ker \chi_a(a) = \mathbb{C}^n$ d'où

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$

5 ▷ Soit $i \in [\![1;r]\!]$, et $u \in \mathscr{L}(E_i)$, $q_i u p_i$ est bien définie de $\mathbb{C}^n$ vers $\mathbb{C}^n$, pour x dans $\mathbb{C}^n$ on a

$$\|q_i u p_i(x)\| = \|u(p_i(x))\| \leq |||u|||_i \, \|p_i(x)\| .$$

p_i est une application linéaire en dimensions finies donc elle continue donc il existe $C_i > 0$ tel que $\|p_i(x)\| \leq C_i \, \|x\|$, ($C_i \neq 0$ car $p_i \neq 0$) par suite

$$\|q_i u p_i(x)\| \leq |||u|||_i C_i \, \|x\| .$$

ce qui donne

$$|||q_i u p_i|||_c = \sup_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\\ x\neq 0}} \frac{\|q_i u p_i(x)\|}{\|x\|} . \leqslant C_i \; |||u|||_i .$$

6 ▷ Soit $i \in [\![1;r]\!]$, a commute avec $(a-\lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^{m_i}$ donc $E_i = \ker(a-\lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^{m_i}$ est stable par a.

7 ▷ Soient $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$.

- On a si $i \neq j$ alors $E_j \subset \ker p_i$ donc $p_i q_j = 0$.
- Si $i = j$, $p_i q_i : E_i \to E_i$, $p_i q_i(x_i) = x_i$ donc $p_i q_i = id_{E_i}$.
- Pour x dans $\mathbb{C}^n = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} E_i$, si $x = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i$ alors $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i p_i(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} q_i(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i = x$, donc

$\sum\limits_{i=1}^{r} q_i p_i = id_{\mathbb{C}^n}$.

8 ▷ On a $a_i = p_i a q_i$ et $q_i a_i p_i = q_i p_i a q_i p_i$, l'application $q_i p_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ et pour tout x dans $\mathbb{C}^n$ on a $q_i p_i(x) = x_i$, donc $q_i p_i$ est la projection de $\mathbb{C}^n$ sur E_i parallelement à $\bigoplus\limits_{j\neq i} E_j$.
E_i est stable par a donc $q_i p_i a q_i p_i(x) = q_i p_i a(x_i) = a(x_i)$, ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{r} q_i a_i p_i(x) = \sum_{i=1}^{r} a(x_i) = a\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right) = a(x)$$

Ainsi $a = \sum\limits_{i=1}^{r} q_i a_i p_i$.

9 ▷ On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|||\frac{t^n}{n!}a^n||| \leq \frac{(|t|\,|||a|||)^n}{n!}$, la série $\sum \frac{t^n}{n!}a^n$ converge absolument en dimension finie donc elle convrge, d'où l'existence de $e^{ta} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}a^n$.
Pour tout $n, N \in \mathbb{N}$ on a $a^n = \sum\limits_{i=1}^{r} q_i a_i^n p_i$ et

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!}a^n = \sum_{i=1}^{r} q_i \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!}a^n\right) p_i$$

les applications p_i et q_i sont continues , le passage à la limite donne $e^{ta} = \sum\limits_{i=1}^{r} q_i e^{ta_i} p_i$

10 ▷ Soit $i \in [\![1;r]\!]$, et $t \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme $a_i = p_i a q_i$ est la restriction de a a E_i donc il vérifie : $\left(a_i - \lambda_i\ id_{E_i}\right)^{m_i} = 0$, par suite

$$\begin{aligned} e^{ta_i} &= e^{t\left(a_i - \lambda_i\ id_{E_i}\right)}.e^{t\lambda_i\ id_{E_i}} \quad (\,si\ ab = ba\ alors\ e^{a+b} = e^a e^b) \\ &= e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{m_i - 1} \frac{t^k}{k!}\left(a_i - \lambda_i\ id_{E_i}\right)^k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |||e^{ta_i}|||_i &\leq \left|e^{t\lambda_i}\right| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||\left(a_i - \lambda_i\ id_{E_i}\right)^k|||_i \\ &\leq \left|e^{t\lambda_i}\right| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i - \lambda_i\ id_{E_i}\,|||_i^k. \end{aligned}$$

avec $\left|e^{t\lambda_i}\right| = e^{t\ \mathrm{Re}(\lambda_i)}$.

11 ▷ On a de la question 9. pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$|||e^{ta}|||_c \leq \sum_{i=1}^{r} |||q_i e^{ta_i} p_i|||_c$$

D'après la question 5. il existe $C_i > 0$ tel que $|||q_i e^{ta_i} p_i|||_c \leqslant C_i\ |||e^{ta_i}|||_i$, donc

$$\begin{aligned} |||e^{ta}|||_c &\leq \sum_{i=1}^{r} C_i\ |||e^{ta_i}|||_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{r} C_i e^{t\ \mathrm{Re}(\lambda_i)} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i - \lambda_i\ id_{E_i}\,|||_i^k. \end{aligned}$$

soit $C = \max\limits_{1\leq i\leq r} C_i$, $\alpha = \max\limits_{1\leq i\leq r} |||a_i - \lambda_i\ id_{E_i}\,|||_i$ alors

$$|||e^{ta}|||_c \leq \sum_{i=1}^{r} e^{t\ \mathrm{Re}(\lambda_i)} \sum_{k=0}^{n} C\frac{|t|^k}{k!}\alpha^k.$$

d'où le résultat ave $P(|t|) = \sum\limits_{k=0}^{n} C\frac{|t|^k}{k!}\alpha$.

12 ▷ Pour tout Z dans $\mathbb{C}^n$ on a $\|v_A(Z)\| = \|AZ\| \leq |||v_A|||_c \|Z\|$, en particulier si $Z = X \in \mathbb{R}^n$ alors $\|u_A(X)\| \leq |||v_A|||_r \|X\|$ par suite $|||u_A|||_r \leq |||v_A|||_c$ en particulier $|||e^{tu_A}|||_r \leqslant |||e^{tv_A}|||_c$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

13 ▷ $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base canonique. Notons g_{x_0} l'unique solution de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ de :

$$\begin{cases} y' = u(y) \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

Donc $g_{x_0}(t) = e^{tA}x_0 = e^{tu}x_0$.

$\Leftarrow$) Si $Sp(A) \subset \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$: on a d'après la question 11.

$$\left\|g_{x_0}(t)\right\| \leq |||e^{tu}|||_c \|x_0\| \leq P(|t|)\sum_{i=1}^{r} e^{t\ \mathrm{Re}(\lambda_i)} \|x_0\|.$$

et $\lim\limits_{t\to+\infty} P(|t|)\sum\limits_{i=1}^{r} e^{t\ \mathrm{Re}(\lambda_i)} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \left\|g_{x_0}(t)\right\| = 0$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$) Si $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \lim\limits_{t\to+\infty} \left\|g_{x_0}(t)\right\| = 0$: soit $\lambda \in Sp(u)$ et z un vecteur propre complexe , on a $e^{tu}z = e^{t\lambda}z$, posons $z = x + iy$, donc

$$\left\|e^{tu}z\right\| \leq \left\|e^{tu}x\right\| + \left\|e^{tu}y\right\| = \|g_x(t)\| + \left\|g_y(t)\right\|$$

ce qui donne

$$\lim_{t\to+\infty} \left\|e^{tu}z\right\| = \lim_{t\to+\infty} \left\|e^{t\lambda}z\right\| = \lim_{t\to+\infty} e^{t\ \mathrm{Re}(\lambda)} \|z\| = 0$$

donc $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ et $Sp(A) \subset \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$.

14 ▷ Soit $t \geq 0$, d'après la question 11 :

$$|||e^{tu}|||_r \leq |||e^{tu}|||_c \leq P(|t|)\sum_{i=1}^{r} e^{t\ \mathrm{Re}(\lambda_i)} \|x_0\|.$$

soit $\beta = \inf\limits_{1\leq i\leq r} \mathrm{Re}(\lambda_i)$ alors $e^{\frac{\beta}{2}t}P(|t|)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ d'où il existe deux constantes C_2 et $\alpha = -\frac{\beta}{2}$ telles que :

$$|||e^{tu}|||_r \leq C_2 e^{-\alpha t}.$$

On a $\left\|g_{x_0}(t)\right\| \leq |||e^{tu}|||_r \|x_0\|$ donc $\left\|g_{x_0}(t)\right\| \leq C_2 e^{-\alpha t} \|x_0\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

C. Démonstration du théorème de Liapounov

15 ▷ Soit $t > 0$, l'inegalité de Cauchy Schwartz donne

$$\left|\left\langle e^{ta}(x) \mid e^{ta}(y)\right\rangle\right| \leq \left\|e^{ta}(x)\right\| \left\|e^{ta}(y)\right\|$$

comme $e^{ta}(x) = g_x(t)$ alors il existe $C > 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\left|\left\langle e^{ta}(x) \mid e^{ta}(y)\right\rangle\right| \leq Ce^{-2\alpha t} \|x\| \, \|y\| \quad (*)$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left\langle e^{ta}(x) \mid e^{ta}(y)\right\rangle dt$ est convergente et b est bien définie .

- b est bilinéaire car l'intégrale et $\langle . \mid . \rangle$ le sont
- b est symétrique .
- Pour tout $t \geq 0$ on a $\left\langle e^{ta}(x) \mid e^{ta}(x)\right\rangle \geq 0$ donc $b(x,x) \geq 0$.
- Si $b(x,x) = 0$, alors l'application $t \longmapsto \left\langle e^{ta}(x) \mid e^{ta}(x)\right\rangle$ est continue positive d'intégrale nulle

donc elle est nulle par suite $e^{ta}(x) = 0$ pour tout $t \geq 0$, en particulier pour $t = 0$ on a $x = 0$.(*on peut utiliser le fait que* e^{ta} *est inversible car* $\det e^{ta} = e^{t \ \mathrm{tr}(a)}$)

b définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Puisque $q(x) = b(x,x)$ alors $x \longmapsto \sqrt{q(x)}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, qui est équivalente à la norme $\|.\|$, il existe $\gamma > 0$ et $\delta > 0$ tels que $\gamma \|x\| \leq \sqrt{q(x)} \leq \delta \|x\|$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$.

16 ▷ Soit $x, h \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} q(x+h) &= b(x+h, x+h) \\ &= b(x,x) + 2b(x,h) + b(h,h) \\ &= q(x) + 2b(x,h) + q(h) \end{aligned}$$

on a $|q(h)| \leq \delta^2 \|h\|^2$ donc $q(h) = o(\|h\|)$ de plus $h \longmapsto b(x,h)$ est linéaire donc q est differentiable et

$$dq(x)(h) = 2b(x,h)$$

par suite

$$\begin{aligned} dq(x)(a(x)) &= 2b(x, a(x)) \\ &= 2\int_0^{+\infty} \left\langle e^{ta}(x) \mid e^{ta}(a(x))\right\rangle dt \end{aligned}$$

Si A est la matrice de a dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$, on sait que $\left(e^{tA}\right)' x = Ae^{tA}x$, l'application qui a un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associe sa matrice dans $\mathscr{B}$ est bi-continue , ce qui donne $\left(e^{ta}\right)' = e^{ta}(a(x))$, donc

$$2\left\langle e^{ta}(x) \mid e^{ta}(a(x))\right\rangle = \left(\left\langle e^{ta}(x) \mid e^{ta}(x)\right\rangle\right)'$$

La relation (*) de la question 15. donne $\lim\limits_{t\to+\infty} \left\langle e^{ta}(x) \mid e^{ta}(x)\right\rangle = 0$ d'où

$$\begin{aligned} dq(x)(a(x)) &= \lim_{t\to+\infty} \left\langle e^{ta}(x) \mid e^{ta}(x)\right\rangle - \langle x \mid x \rangle \\ &= -\|x\|^2 \end{aligned}$$

17 ▷ On a

$$\begin{aligned} q\left(f_{x_0}\right)'(t) &= b(f_{x_0}(t), f_{x_0}(t))' \\ &= 2b(f'_{x_0}(t), f_{x_0}(t)) \\ &= 2b(\varphi\left(f_{x_0}(t)\right), f_{x_0}(t)) \\ &= 2b(\varepsilon\left(f_{x_0}(t)\right), f_{x_0}(t)) + 2b(\alpha\left(f_{x_0}(t)\right), f_{x_0}(t)) \\ &= dq(f_{x_0}(t))(\alpha(f_{x_0}(t))) + 2b(\varepsilon\left(f_{x_0}(t)\right), f_{x_0}(t)) \\ &= -\left\|f_{x_0}(t)\right\|^2 + 2b\left(f_{x_0}(t), \varepsilon\left(f_{x_0}(t)\right)\right) \end{aligned}$$

18 ▷ Rappelons que $x \to \sqrt{q(x)}$ est une norme et il existe $\gamma > 0$ et $\delta > 0$ tels que $\gamma \|x\| \leq \sqrt{q(x)} \leq \delta \|x\|$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$.

On a $\varphi(f_{x_0}(t)) - \varphi(0) = d_\varphi(0)(f_{x_0}(t)) + o(f_{x_0}(t))$

Soit $\eta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que si $q(f_{x_0}(t)) \leq \alpha$ alors $\sqrt{q(o(f_{x_0}(t)))} \leq \eta\ \sqrt{q(f_{x_0}(t))}$, par suite

$$\sqrt{q(\varepsilon\left(f_{x_0}(t)\right))} = \sqrt{q(\varphi(f_{x_0}(t)) - d_\varphi(0)(f_{x_0}(t)))} \leq \eta\sqrt{q(f_{x_0}(t))}$$

on a

$$\begin{aligned} b\left(f_{x_0}(t), \varepsilon\left(f_{x_0}(t)\right)\right) &\leq \sqrt{q(f_{x_0}(t))}\sqrt{q(\varepsilon(f_{x_0}(t)))} \\ &\leq \eta q(f_{x_0}(t)) \end{aligned}$$

donc

$$-\left\|f_{x_0}(t)\right\|^2 + 2b\left(f_{x_0}(t), \varepsilon\left(f_{x_0}\right)(t)\right) \leqslant \left(2\eta - \gamma^2\right) q(f_{x_0}(t))$$

on choisit η tel que $2\eta - \gamma^2 < 0$, d'où l'existence de $\alpha > 0$ et $\beta = \gamma^2 - 2\eta > 0$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on ait :

$$q\left(f_{x_0}(t)\right) \leqslant \alpha \Rightarrow -\left\|f_{x_0}(t)\right\|^2 + 2b\left(f_{x_0}(t), \varepsilon\left(f_{x_0}\right)(t)\right) \leqslant -\beta q\left(f_{x_0}(t)\right).$$

19 ▷ • Montrons que $q(x_0) < \alpha \Rightarrow q\left(f_{x_0}(t)\right) \leqslant \alpha\ , \forall t \geqslant 0$.

Supposons que $q(x_0) < \alpha$ et $\exists t_1 > 0$ tel que $q\left(f_{x_0}(t_1)\right) > \alpha$ et qui se réalise pour la première fois (*car sinon dans chaque voisinage de* 0 *on trouve un* t_n *tel que* $q\left(f_{x_0}(t_n)\right) > \alpha$, *par passage à la limite on aura* $q(x_0) \geq \alpha$) , par le T.V.I il existe $t_2 \in]0, t_1[$ tel que $q\left(f_{x_0}(t_2)\right) = \alpha$.

Donc pour tout t dans $[0, t_2]$ on a $q\left(f_{x_0}(t)\right) \leqslant \alpha$ par suite

$$q\left(f_{x_0}\right)'(t) = \left\|f_{x_0}(t)\right\|^2 + 2b\left(f_{x_0}(t), \varepsilon\left(f_{x_0}\right)(t)\right) \leqslant -\beta q\left(f_{x_0}(t)\right) \leq 0$$

$q\left(f_{x_0}\right)$ est décroissante sur $[0, t_2]$ et $q\left(f_{x_0}\right)(t) \geq q\left(f_{x_0}(t_2)\right) = \alpha$ ce qui contredit $q(x_0) < \alpha$. D'où le résultat.

• On a

$$\begin{aligned} q(x_0) &< \alpha \Rightarrow q\left(f_{x_0}(t)\right) \leqslant \alpha, \forall t \geqslant 0 \\ &\Rightarrow q\left(f_{x_0}\right)'(t) \leqslant -\beta q\left(f_{x_0}(t)\right), \forall t \geqslant 0 \\ &\Rightarrow \left(e^{\beta t} q\left(f_{x_0}\right)(t)\right)' \leqslant 0, \forall t \geqslant 0 \\ &\Rightarrow e^{\beta t} q\left(f_{x_0}\right)(t) - q(x_0) \leqslant 0, \forall t \geqslant 0 \\ &\Rightarrow q\left(f_{x_0}\right)(t) \leqslant e^{-\beta t} q(x_0), \forall t \geqslant 0 \end{aligned}$$

20 ▷ On sait qu' il existe $\gamma > 0$ et $\delta > 0$ tels que $\gamma \|x\| \leq \sqrt{q(x)} \leq \delta \|x\|$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$.

On a

$$\|x_0\| < \frac{\sqrt{\alpha}}{\delta} \Rightarrow q(x_0) < \alpha$$

soit $\widetilde{\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\delta}$, donc

$$\begin{aligned} x_0 \in B(0, \widetilde{\alpha}) \quad & \Rightarrow \quad q\left(f_{x_0}\right)(t) \leqslant e^{-\beta t} q(x_0), \forall t \geqslant 0 \\ & \Rightarrow \quad \sqrt{q\left(f_{x_0}\right)(t)} \leqslant e^{-\frac{\beta}{2}t} \sqrt{q(x_0)}, \forall t \geqslant 0 \\ & \Rightarrow \quad \gamma \left\| f_{x_0}(t) \right\| \leq \delta e^{-\frac{\beta}{2}t} \|x_0\|, \forall t \geqslant 0 \end{aligned}$$

posons $C = \frac{\delta}{\gamma}$, alors on a :

$$\forall x_0 \in B(0, \widetilde{\alpha}), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \left\| f_{x_0}(t) \right\| \leqslant C \; e^{-\frac{\beta}{2}t} \|x_0\|.$$

FIN