Proposition de correction : Mines Maths 1 PC 2023

OKN - TC

2 mai 2023

1 Questions préliminaires

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Supposons que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(S)$ et x, vecteur propre associée à la valeur propre λ. Alors $\langle Sx, x\rangle = x^T Sx \geq 0$ et $\langle Sx, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$. Donc $\lambda \geq 0$. Ainsi, on a bien $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$.
   Réciproquement, supposons que $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$. Par le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = PDP^T$. De fait, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T SX = X^T PDP^T X = (P^T X)^T D(P^T X) = \langle DP^T X, P^T X\rangle = \langle DY, Y\rangle$ avec $Y = P^T X = (y_k)_{1\leq k\leq n}$. En notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, les coefficients diagonaux de D rangés dans l'ordre croissant (ils sont par ailleurs tous positifs), on a
   $$\langle DY, Y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \geq \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \geq 0.$$
   D'où l'implication réciproque.
2. Soit $t \in [0, 1], S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors
   $$\langle (tS_1 + (1-t)S_2)X, X\rangle = \underbrace{t\langle S_1X, X\rangle}_{\geq 0} + \underbrace{(1-t)\langle S_2X, X\rangle}_{\geq 0} \geq 0.$$
   Donc $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est convexe.
   Soit $t \in [0, 1], S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors
   $$\langle (tS_1 + (1-t)S_2)X, X\rangle = t\,\underbrace{\langle S_1X, X\rangle}_{>0} + (1-t)\,\underbrace{\langle S_2X, X\rangle}_{>0} > 0,$$
   car pour tout $a, b > 0, t \in [0, 1]$, la quantité $at + (1-t)b$ est strictement positive (clair si $t \in]0, 1[$, et si $t = 0$ ou 1 car la quantité vaut respectivement $b > 0$ et $a > 0$). Donc $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.
   Remarque : on peut montrer que ce sont en fait des cônes convexes.
   Ce ne sont pas des espaces vectoriels. En effet, $I_n \in \mathcal{S}_n^{++}\mathbb{R})$ mais $-I_n$ ne l'est pas (on utilise par exemple la caractérisation de la question 1). Cela marche aussi pour $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors par la proposition admise en 1, les valeurs propres de A sont strictement positives. Je les notes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. En notant $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^T$ par le théorème spectral. Je note $R = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$. Cette matrice est bien définie puisque l'on considère des racines carrées de quantités positives. Alors $R \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}_+^*$ et on a $A = S^2$ avec $S = PRP^T$. Clairement, $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux de R, strictement positif.
4. Procédons par récurrence sur p.
   Pour $p = 1, \lambda_1 = 1$ et $f(x_1) \leq f(x_1)$.
   Traitons le cas $p = 2$. Soit λ_1, λ_2 positifs, tel que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, x_1, x_2 deux réels de I. En remarquant alors que $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, l'inégalité s'écrit :
   $$(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1)f(x_2).$$

Par convexité, le résultat en découle.
Supposons l'hypothèse vraie au rang $p-1$. Soit $(x_1, \cdots, x_p) \in I^p, (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.
Si $\forall i \in [\![1, p-1]\!], \lambda_i = 0$, l'inégalité est immédiate. Alors $\lambda := \lambda_1 + \cdots, \lambda_{p-1} > 0$. On pose

$$X := \frac{\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i}{\lambda} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i.$$

Alors $\sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$. Par hypothèse de récurrence, j'ai donc :

$$f(X) \leq \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{\lambda} f(x_i).$$

Or, en notant $\overline{x} := \lambda X + \lambda_p x_p$, puisque $\lambda_p = 1 - \lambda$, par convexité de f,

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) = f(\overline{x}) \leq \lambda f(X) + \lambda_p f(x_p) \leq \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i f(x_i) + \lambda_p f(x_p) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i).$$

2 Une première inégalité de convexité

5. $x \mapsto -\ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$ et sa dérivée deuxième vaut $x \mapsto \frac{1}{x^2} > 0$. Ainsi, $x \mapsto -\ln(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
Puisque $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, M est diagonalisable par le théorème spectral. En notant $\mu_1, \cdots, \mu_n$ les valeurs propres de M (elles sont positives), on a $\det(M) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i$. De plus, $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$. L'inégalité à montrer s'écrit donc

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} \mu_i\right)^{1/n}.$$

Quitte à renuméroter, on note $\mu_1, \cdots, \mu_{n_0}$, les valeurs propres strictement positives de M. On applique alors 4 avec $p = n_0$, $\lambda_i = \frac{1}{n}$ et $x_i = \mu_i$. On obtient alors

$$-\ln\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} \mu_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_0} -\ln(\mu_i),$$

ce qui se réécrit

$$-\ln\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} \mu_i\right) \leq -\frac{1}{n} \ln\left(\prod_{i=1}^{n_0} \mu_i\right).$$

En appliquant $x \mapsto \exp(-x)$ sur cette inégalité, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} \mu_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n_0} \mu_i\right)^{1/n},$$

d'où

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} \mu_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n_0} \mu_i\right)^{1/n} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} \mu_i\right)^{1/n}.$$

6. Par le théorème spectral, en notant $\mu_1, \cdots, \mu_n$ les valeurs propres de M et $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que
$$M = PDP^T.$$
Donc $M^T M = (P^T)^T DP^T PDP^T = PD^2P^T$ donc $\mathrm{Tr}(M^T M) = \mathrm{Tr}(D^2) = \sum_{k=1}^{n} \mu_i^2$. Donc
$$\|M\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}(M^T M)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mu_i^2}.$$

7. En utilisant l'inégalité admise dans cette partie, appliquée pour $x_k = \mu_k$ (possible car $\mu_k \geq 0$ pour tout k), on reconnait (comme dans 5)
$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k = \mathrm{Tr}(M), \prod_{k=1}^{n} x_k^{1/n} = (\det(M))^{1/n},$$
ce qui donne
$$2\max(\mu_1, \cdots, \mu_n)\left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(M) - \det{}^{1/n}(M)\right) \geq \frac{1}{n}\|N\|_2^2,$$
avec N, une matrice de valeurs propres $x_k - \det(M)^{1/n}$ par 6. Clairement, $M - \det(M)^{1/n} I_n$ convient, donc on prends $N = M - \det(M)^{1/n} I_n$.
Enfin, $\|M\|_2 =_{Q6} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mu_i^2} \geq \sqrt{0+0+0+\mu_{i_0}^2+0+0} = \mu_{i_0}$ avec μ_{i_0}, le maximum du n-uplet $\{\mu_1, \cdots, \mu_n\}$ (il n'y a pas de valeur absolue car les valeurs propres sont positives). Donc $\|M\|_2 \geq \max(\{\mu_1, \cdots, \mu_n\})$. On en déduit donc
$$\left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(M) - \overset{1/n}{\det}(M)\right) \geq_* \frac{\|N\|_2^2}{n2\max(\mu_1, \cdots, \mu_n)} = \frac{\|M - \det(M)^{1/n} I_n\|_2^2}{2n\max(\mu_1, \cdots, \mu_n)} \geq \frac{\|M - \det(M)^{1/n} I_n\|_2^2}{2n\|M\|_2},$$
$(*)$ car M est non nulle donc $\mathrm{Sp}(M) \neq \{0\}$.

3 On continue avec de la convexité

8. Soit $A = S^2$ comme dans 3. Alors $S^{-1}BS^{-1}$ est symétrique, donc il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ tel que $S^{-1}BS^{-1} = PDP^T$. Donc $B = SPDP^T S$. On note alors $Q = SP$. $Q^T = P^T S^T = P^T S$ car S est symétrique. De plus, Q est inversible car P l'est, et S l'est. En effet, une matrice définie positive est inversible car le déterminant d'une matrice symétrique définie positive est le produit des valeurs propres, valeurs qui sont strictement positive.
De fait, j'ai bien $B = QDQ^T$. Il ne reste qu'à montrer que $QQ^T = A$. On a $QQ^T = SPP^T S^T = S^2 = A$ car $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et S est symétrique.
Si B est aussi symétrique définie positive, alors $S^{-1}BS^{-1}$ est symétrique définie positive. En effet,
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle S^{-1}BS^{-1}X, X\rangle = \langle BS^{-1}X, (S^{-1})^T X\rangle = \langle B(S^{-1}X), S^{-1}X\rangle.$$
Or, $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle BY, Y\rangle > 0 \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle B(S^{-1}X), S^{-1}X\rangle > 0$ par le changement de variable bijectif $X \mapsto S^{-1}X$ (bijectif car S^{-1} est inversible). Donc $S^{-1}BS^{-1}$ hérite du caractère définie positif de B. Ainsi, dans l'écriture $S^{-1}BS^{-1} = PDP^T$, D vit dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}_+^*)$.

9. $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \ln(1+e^t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée deuxième vaut $x \mapsto \dfrac{u''(x)u(x) - u'(x)^2}{u^2(x)}$ avec $u : x \mapsto 1 + e^x$. Donc $f'' = \dfrac{\exp \times (1+\exp) - \exp^2}{(1+\exp)^2} = \dfrac{\exp}{(1+\exp)^2} > 0$. Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

10. Par 8, on a
$$\det(A+B) = \det(QQ^T + QDQ^T) = \det(Q(I_n+D)Q^T) = \det(Q)\det(Q^T)\det(I_n+D).$$
En notant $D = \operatorname{diag}(d_1, \cdots, d_n)$ et puisque $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}_+^*)$, et $\det(I_n+D) = \prod_{i=1}^n (1+d_i)$.
Mais par 4 appliqué à la fonction de la 9, on a, pour $\lambda_i = \frac{1}{n}, x_i = \ln(d_i)$ (défini car $d_i > 0$ pour tout i),
$$\ln\left(1+\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(d_i)\right)\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(1+\exp(\ln(d_i))),$$
ce qui donne, après simplificiation,
$$\ln\left(1+\prod_{i=1}^n (d_i)^{1/n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(1+d_i) = \ln\left(\prod_{i=1}^n (1+d_i)^{1/n}\right).$$
Par croissance de exp sur $\mathbb{R}$, on en déduit que
$$1+\prod_{i=1}^n (d_i)^{1/n} \leq \prod_{i=1}^n (1+d_i)^{1/n}.$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}
\det(A+B)^{1/n} &= \det(A)^{1/n}\prod_{i=1}^n (1+d_i)^{1/n} \\
&\geq \det(A)^{1/n}\left(1+\prod_{i=1}^n (d_i)^{1/n}\right) \\
&= \det(A)^{1/n} + \det(A)^{1/n}\det(D)^{1/n} \\
&= \det(A)^{1/n} + \det(QDQ^T)^{1/n} \\
&= \det(A)^{1/n} + \det(B)^{1/n}.
\end{aligned}$$

11. Déjà, le résultat est clair si $t=0$ ou $t=1$. Par 11, puisque t et $1-t$ sont positifs donc que $(1-t)A$ et tB sont symétriques définies positives, on a
$$\forall t \in]0,1[, \det{}^{1/n}((1-t)A+tB) \geq \det{}^{1/n}((1-t)A) + \det{}^{1/n}(tB) = (1-t)\det{}^{1/n}(A) + t\det{}^{1/n}(B).$$
Pour conclure, il s'agit d'établir l'inégalité suivante :
$$\forall a,b>0, \forall t \in]0,1[, (1-t)a+tb \geq a^{1-t}b^t.$$
En effet, on a
$$\ln(a^{1-t}b^t) = (1-t)\ln(a) + t\ln(b) \leq \ln((1-t)a+tb)$$
car ln est concave. On a l'inégalité voulue en passant la précédente à l'exponentielle. On applique alors le résultat pour $a = \det(A), b = \det(B)$ pour obtenir
$$\forall t \in]0,1[, \det{}^{1/n}((1-t)A+tB) \geq \left(\det{}^{1-t}(A)\det{}^t(B)\right)^{1/n}.$$
On passe cette inégalité à la puissance n pour conclure.
Si maintenant A ou B ne sont que dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, disons seulement A, alors soit A est inversible (auquel cas, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, soit A ne l'est pas.
Si A est inversible, alors l'inégalité tient comme prouvé. Sinon, $\det(A) = 0$ et on réclame qu'un déterminant d'une matrice symétrique positive à être positive, ce qui est toujours le cas. La disjonction tient toujours sur B. Si maintenant A et B ne sont pas inversibles, alors on réclame encore une trivialité.

12. En passant au ln, l'inégalité obtenue en 11 (possible car A, B vivent dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc que $\det(A) > 0, \det(B) > 0$), on obtient que $\ln \circ \det$ est concave sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

4 Encore de la convexité !

13. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*, g(t) = \det(I_n + tA) = (-t)^n \det\left(\frac{-1}{t} I_n - A\right) = (-t)^n \chi_A(-1/t)$. Puisque A est symétrique, A est diagonalisable. Ainsi
$$g(t) = (-t)^n \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)(-1/t) = (-t)^n \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \left(\frac{-1}{t} - \lambda\right) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (1 + t\lambda),$$
car $|\mathrm{Sp}(A)| = n$. Ainsi, g est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
14. Par 13, on peut donc écrire
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ln(g(t) = \ln\left(\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (1 + t\lambda)\right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \ln(1 + t\lambda) \underset{(***)}{\leq} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} t\lambda = t\mathrm{Tr}(A),$$
cette dernière car la somme des valeurs propres d'une matrice diagonalisable vaut la trace de la matrice. On justifie $(***)$ par la concavité de $\ln(1 + \cdot)$, affirmant que $\ln(1 + x)$ est en-dessous de sa tangente en 0 d'équation $x \mapsto x$.

5 Et pour finir... de la convexité !

15. A est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc inversible. Ainsi,
$$\forall t \in \mathbb{R}, f_A(t) = \det(A + tM) = \det(A)\det(I_n + tA^{-1}M) = \det(A)\tilde{g}(t),$$
avec $\tilde{g} : t \mapsto \det(I_n + t(A^{-1}M))$. On va montrer que $A^{-1}M$ est diagonalisable, ce qui permettra, en réutilisant les mêmes arguments que dans 13 pour montrer que $\tilde{g}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc que f_A aussi. Pour montrer que $A^{-1}M$ est diagonalisable, fixons S dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = S^2$ (par question 3). Alors $A^{-1}M = S^{-1}S^{-1}M = S^{-1}S^{-1}MS^{-1}S = S^{-1}(S^{-1}MS^{-1})(S^{-1})^{-1}$. Donc $A^{-1}M$ est semblable à $S^{-1}MS^{-1}$, qui est clairement symétrique réelle, donc diagonalisable par le théorème spectral. Donc $A^{-1}M$ hérite de la diagonalisabilité de $S^{-1}MS^{-1}$.
16. Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas de rang au-dessus duquel la matrice $A + \frac{1}{k}M$ soit symétrique définie positive. Alors pour chaque entier k, il existe $X_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de norme 1 tel que $X_k^T\left(A + \frac{1}{k}M\right)X_k \leq 0$ $(\star)$. Puisque le cercle unité pour $\|\cdot\|$ est un fermé borné en dimension finie, c'est un compact : il existe alors une extractrice φ tel que $X_{\varphi(k)}$ converge dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, disons vers X_∞. Alors l'inégalité $\star$ passe donc à la limite en $X_\infty^T A X_\infty \leq 0$, ce qui est absurde. Ainsi, il existe un rang N_0 tel que pour $k \geq N_0$, on a $A + \frac{1}{k}M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
On fait de même pour $A - \frac{1}{k}M$ pour trouver un rang N_1 convenable. Avec $\varepsilon_0 = \min\left(\frac{1}{N_0+1}, \frac{1}{N_1+1}\right)$, et $|t| \leq \varepsilon_0$, le résultat tombe.
17. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$f_{I_n}(t) = \det(I_n + tM).$$
Mais M est symétrique donc diagonalisable, donc par le même raisonnement que 13, on en déduit que $f_{I_n}(t) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (1+t\lambda) = 1+t \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \lambda + o(t)$ en développant le produit. Donc $f_{I_n}(t) = 1+t\mathrm{Tr}(M)+o(t)$.
Si maintenant on considère $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, A est inversible donc
$$f_A(t) = \det(A + tM) = \det(A)(\det(I_n + t(A^{-1}M)).$$
Puisque $A^{-1}M$ est symétrique (même argument que dans 15), le raisonnement précédent s'applique encore pour le calcul de $\det(I_n + tA^{-1}M)$. On a donc
$$f_A(t) = \det(A)(1 + \mathrm{Tr}(A^{-1}M)t + o(t)) = \det(A) + \det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}M)t + o(t).$$

18. $A+tM$ est donc inversible. J'ai donc, en notant $u(t)=A+tM$,
$$\begin{aligned}\frac{f_A(t+h)-f_A(t)}{h} &= \frac{\det(u(t)+hM)-\det(u(t))}{h}\\ &= \det(u(t))\frac{\det(I_n+hu^{-1}(t)M)-1}{h}\\ &\underset{h\to 0}{\longrightarrow} \det(u(t))\mathrm{Tr}(u^{-1}(t)M),\end{aligned}$$
la limite étant obtenue grâce au développement limité précédent. Ainsi,
$$f_A'(t)=\det(A+tM)\mathrm{Tr}((A+tM)^{-1}M).$$
Je ne vois pas mieux, pour l'instant, comme résultat, mais cela semble suffisant au vu de la suite.
19. En dérivant l'égalité $\Phi(t)(A+tM)=I_n$, on a $\Phi'(t)(A+tM)+\Phi(t)M=0$. Ainsi, en 0, on a $\Phi'(0)=-A^{-1}MA^{-1}$, car $\Phi(0)=A^{-1}$. De fait, par Taylor, on a bien
$$\Phi(t)\underset{t\to 0}{\Phi}(0)+t\Phi'(0)+o(t)=A^{-1}-A^{-1}MA^{-1}t+o(t).$$
20. On remarque que $\varphi_\alpha=\dfrac{1}{\alpha}(f_A)^{-\alpha}$, qui est une composition de fonctions dérivables pourvu que f_A ne s'annule pas : c'est le cas puisque $|t|\le\varepsilon_0$ donc $A+tM$ est inversible pour tout $|t|\le\varepsilon_0$, donc son déterminant est non nul. On a donc
$$\forall |t|\le\varepsilon_0, \varphi_\alpha'(t)=\frac{-\alpha}{\alpha}f_A'(t)f_A^{-\alpha-1}(t).$$
Or, par 18, $f_A'(t)=f_A(t)\mathrm{Tr}((A+tM)^{-1}M)$. Donc
$$\forall |t|\le\varepsilon_0, \varphi_\alpha'(t)=-\mathrm{Tr}((A+tM)^{-1}M)f_A^{-\alpha-1+1}(t)=-\mathrm{Tr}((A+tM)^{-1}M)f_A^{-\alpha}(t).$$
21. φ_α' est dérivable en 0 en tant que produit de fonctions dérivable en 0 (la trace étant une application polynômiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $t\mapsto(A+tM)$ est supposée de classe $\mathcal{C}^1$ en 0). Il faut toutefois remarquer que la dérivée de $t\mapsto\mathrm{Tr}(A(t))$ avec $A(t)$, une matrice qui dépend de t n'est autre que $t\mapsto\mathrm{Tr}(A'(t))$ (on réalise une dérivée coefficient par coefficient). Ainsi, par continuité du déterminant,
$$\varphi''(0)=-\mathrm{Tr}(-A^{-1}MA^{-1}M)\mathrm{det}^{-\alpha}(A)-\mathrm{Tr}((A)^{-1}M)(-\alpha f_A'(0)f_A^{-\alpha-1}(0)),$$
ce qui donne
$$\varphi''(0)=\mathrm{Tr}(A^{-1}MA^{-1}M)\mathrm{det}^{-\alpha}(A)+\alpha\mathrm{Tr}(A^{-1}M)\mathrm{Tr}(A^{-1}M)\mathrm{det}^{-\alpha}(A).$$
Après réécriture, on a
$$\varphi''(0)=\mathrm{det}^{-\alpha}(A)(\mathrm{Tr}((A^{-1}M)^2)+\alpha\mathrm{Tr}^2(A^{-1}M)).$$
22. On l'a déjà utilisé plusieurs fois. Pour rappel, on peut écrire $A=S^2$ donc $A^{-1}M=S^{-1}(S^{-1}MS^{-1})S$ et $S^{-1}MS^{-1}$ est symétrique réelle.
23. Déjà, $\mathrm{det}^{-\alpha}(A)>0$ car A est symétrique définie positive. Notons $C=S^{-1}MS^{-1}$ comme avant. Alors $\mathrm{Tr}((A^{-1}B)=\mathrm{Tr}(C)$ et $\mathrm{Tr}((A^{-1}B)^2)=\mathrm{Tr}(C^2)$. Ainsi, par Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire matriciel $M,N\mapsto\mathrm{Tr}(M^TN)$,
$$\mathrm{Tr}^2(C\times I_n)\le\mathrm{Tr}(C^2)\mathrm{Tr}(I_n)=n\mathrm{Tr}(C^2).$$
Ainsi,
$$\mathrm{Tr}(C^2)-\frac{1}{n}\mathrm{Tr}^2(C)\ge 0.$$
Donc pour tout $\alpha\ge\dfrac{-1}{n}$, on a
$$\mathrm{Tr}(C^2)+\alpha\mathrm{Tr}^2(C)\ge 0,$$
ce qui donne finalement
$$\mathrm{Tr}((A^{-1}M)^2)+\alpha\mathrm{Tr}^2(A^{-1}M)\ge 0.$$
Ainsi, on a bien $\varphi_\alpha''(0)\ge 0$.

24. Puisque $\varphi_\alpha''(0) > 0$, φ est localement convexe au voisinage de 0 par continuité de φ_α'' (****) : il existe donc $\eta > 0$, tel que $\varphi_{]-\eta,\eta[}$ soit convexe. De fait, φ est au-dessus de sa tangente en 0, qui a pour équation $t \mapsto \varphi(0) + t\varphi'(0) = \dfrac{1}{\alpha}\det^{-\alpha}(A) - t \times \mathrm{Tr}(A^{-1}M)\det^{-\alpha}(A)$. On obtient donc

$$\forall t \in]-\eta,\eta[, \frac{1}{\alpha}\det^{-\alpha}(A+tM) \geq \frac{1}{\alpha}\det^{-\alpha}(A) - t \times \mathrm{Tr}(A^{-1}M)\det^{-\alpha}(A).$$

(****) : au vu de l'expression de φ_α', cette fonction est continûment dérivable en 0.

FIN DU SUJET