Concours commun Mines et Ponts 2023

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2 - MP

m.laamoum@gmail.com.

Fonction de Wallis

Préliminaires

1. Calcul de $\sigma(1)$

1 ▷ Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^k}{k^2}$ est égal à 1 , σ est définie au moins sur $]-1,1[$, cette série converge absolument pour $x=1$ ou $x=-1$ donc le domaine de définition de σ est exactement égal à $[-1,1]$.
On a $\sup\limits_{x\in[-1,1]}\left|\dfrac{x^k}{k^2}\right| = \dfrac{1}{k^2}$, donc la série $\sum \frac{x^k}{k^2}$ converge normalement et uniformément sur $[-1,1]$, les fonctions : $x\mapsto \dfrac{x^k}{k^2}$ sont continues donc σ est continue sur $[-1,1]$.

2 ▷ • On intégre par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t\cos(nt)dt &= \left[\frac{t\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{n}\,dt\\ &= \left[\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi\\ &= \frac{(-1)^n-1}{n^2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t^2\cos(nt)dt &= \left[t^2\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - 2\int_0^\pi \frac{t\sin(nt)}{n}\,dt\\ &= -2\left(\left[-\frac{t\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{n^2}\,dt\right)\\ &= \frac{2\pi\cos(n\pi)}{n^2} - 2\left[\frac{\sin(nt)}{n^3}\right]_0^\pi\\ &= \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^\pi \left(\alpha t^2+\beta t\right)\cos(nt)dt = \frac{2\pi\alpha(-1)^n+\beta\left((-1)^n-1\right)}{n^2}$$

Cherchons donc α et β tels que : $2\pi\alpha(-1)^n+\beta\left((-1)^n-1\right)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
On obtient pour n pair $\alpha=\frac{1}{2\pi}$ et pour n impair,$\beta=-1$.
Ainsi

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$$

- Soit $t \in]0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\begin{aligned}
C_n(t) &= \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\left(\left(\mathrm{e}^{it}\right)^k\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{it(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{it}} - 1\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{e}^{i\frac{itn}{2}} - 1\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)\cos\left(\frac{nt}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad {\scriptstyle \sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

3 ▷ • Soit φ de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ et $x > 0$ alors

$$\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)dt = \left[\frac{-\cos(xt)}{x}\varphi(t)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{x}\int_0^{\pi} \varphi'(t)\cos(xt)dt$$

φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ donc φ et φ' sont bornées , soit $M_0 = \sup_{t\in[0,\pi]} |\varphi(t)|$ et $M_1 = \sup_{t\in[0,\pi]} |\varphi'(t)|$, ce qui donne :

$$\left|\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)dt\right| \leq \frac{2M_0 + \pi M_1}{x}$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)dt = 0$$

- On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)dt \\
&= \int_0^{\pi} \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4\pi}dt + \int_0^{\pi}\left(\frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi}\left(\frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt
\end{aligned}$$

puisque $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = -1$ alors la fonction

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in]0,\pi] \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est continue sur $[0,\pi]$, de plus la fonction

$$\omega : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t} & \text{si } t \in]0,\pi] \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est DSE en 0 ,avec un rayon de convergence infini, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$, de plus elle ne s'annule pas sur $[0,\pi]$ donc $\frac{1}{\omega}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\pi]$, ainsi φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ et .

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt$$

le résultat précédent donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt = 0$, par suite

$$\sigma(1) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2. Équivalents

4 $\triangleright$ • Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g : t \mapsto (\sin(t))^x$ est définie et continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $g(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{-x}}$ donc g est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ si et seulement si $x > -1$, d'où $D_f =]-1,+\infty[$.

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x\,dt$$

• Soit $x > -1$, on a

$$\begin{aligned} f(x+2) &= \int_0^{\pi/2} (-\cos(t))'(\sin(t))^{x+1}\,dt \\ &= \left[-\cos(t)(\sin(t))^{x+1}\right]_0^{\pi/2} + (x+1)\int_0^{\pi/2} (\cos(t))^2(\sin(t))^x\,dt \\ &= (x+1)\int_0^{\pi/2} \left(1-(\sin(t))^2\right)(\sin(t))^x\,dt \\ &= (x+1)\left(f(x) - f(x+2)\right) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2).$$

5 ▷ • La fonction $g := (x,t) \mapsto (\sin(t))^x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I \times \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathrm{e}^{x\ln(\sin(t))}\right) = (\ln(\sin(t)))^2\,(\sin(t))^x$$

pour x dans I , $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\ln^2(t)}{t^{-x}}$, soit $\lambda \in \left]-x, 1\right[$ on $\frac{\ln^2(t)}{t^{-x}} \underset{t\to 0}{=} o(\frac{1}{t^\lambda})$, ce qui donne l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Soit $[a,b] \subset I$, on a

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| = (\ln(\sin(t)))^2\,(\sin(t))^a = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(a,t)$$

cette domination par une fonction intégrable entraine que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, ceci est valable pour tout $[a,b] \subset I$ donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et :

$$\forall x \in I \ , \ f'(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)).(\sin(t))^x\,dt \ \text{ et } \ f''(x) = \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^2\,(\sin(t))^x\,dt.$$

• Pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ et $f''(x) \geq 0$ donc f est décroissante et convexe sur I.

6 ▷ On pout tout x dans I : $(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2)$; donc

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} (x+1)f(x) &= \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} (x+2)f(x+2)\\ &= f(1)\end{aligned}$$

$f(1) = \int_0^{\pi/2} \sin(t)dt = 1$, d'où

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{x\to -1\\ >}}{\sim} \frac{1}{x+1}}$$

7 ▷ • Soit n un entier naturel . D'après la question 4. on a $(n+2)f(n+2) = (n+1)f(n)$ puis, en multipliant les deux membres par $f(n+1)$

$$(n+2)f(n+2)f(n+1) = (n+1)f(n+1)f(n)\ .$$

Ainsi, la suite $((n+1).f(n+1).f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
On en déduit que pour tout entier naturel n, $(n+1)f(n+1)f(n) = f(1)f(0) = \frac{\pi}{2}$ et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}}(*)$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n+2) \leq f(n+1) \leq f(n)$, on divise cette relation par $f(n)$ qui est strictement positif ,

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{f(n+2)}{f(n)} \leq \frac{f(n+1)}{f(n)} \leq 1$$

le théorème d'encadrement donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1$ et $f(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(n)$.

La relation (*) donne $f(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Soit $x \geq 1$ et $n = \mathrm{e}(x)$ (*partie entière*) , on a $f(n+1) < f(x) \leq f(n)$ et

$$\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}},$$

ainsi :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}}$$

8 ▷ ...

3. Développement en série entière

9 ▷ • Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^n$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $(\ln(\sin(t)))^n \underset{t\to0}{=} o(\frac{1}{\sqrt{t}})$, donc l'intégrale D_n est convergente.

• On a $D_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt$, on fait le changement $u = \frac{\pi}{2} - t$ on obtient $D_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))$ dt .

10 ▷ • On a $f'(0) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) \ dt = D_1$.

Calcul de D_1 : on a

$$\begin{aligned} 2D_1 &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)\cos(t))dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\frac{\sin(2t)}{2})dt \\ &= -\frac{\pi\ln(2)}{2} + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))dt \end{aligned}$$

dans cette dérnière intégrale posons $2t = u$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))dt &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))du \\ &= \frac{1}{2}D_1 + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))du \end{aligned}$$

le changement $v = \pi - u$ donne $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))du = D_1$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))dt = D_1$,

d'où $D_1 = -\frac{\pi\ln(2)}{2}$.

Finalement $\boxed{f'(0) = -\frac{\pi\ln(2)}{2}}$.

• $f'(1) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)).(\sin(t)) \ dt$. Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, par une intégration par parties on a :

$$\int_\varepsilon^{\pi/2} \ln(\sin(t)).(\sin(t)) \ dt = [-\ln(\sin(t))\cos(t)]_\varepsilon^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} \ dt$$

le changement de variable $\cos(t) = u$ donne

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)}\, dt &= \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\cos^2(t)}{1-\cos^2(t)} \sin(t)\, dt \\
&= \int_0^{\cos(\varepsilon)} \frac{u^2}{1-u^2} \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\cos(\varepsilon)} -1 + \frac{1}{2(1-u)} + \frac{1}{2(1+u)} \mathrm{d}u \\
&= \left[-u - \tfrac{1}{2}\ln(1-u) + \tfrac{1}{2}\ln(1+u)\right]_0^{\cos(\varepsilon)}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f'(1) = -1 + \frac{\ln(2)}{2} + \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\ln(\sin(\varepsilon))\cos(\varepsilon) - \tfrac{1}{2}\ln(1-\cos(\varepsilon))\right)$$

et on a

$$\begin{aligned}
\ln(\sin\varepsilon)\cos(\varepsilon) - \tfrac{1}{2}\ln(1-\cos(\varepsilon)) &= \ln(\varepsilon + o(\varepsilon))(1+o(\varepsilon)) - \tfrac{1}{2}\ln(\frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)) \\
&= \frac{\ln(2)}{2} + o(\varepsilon)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{f'(1) = \ln(2) - 1}$

11 ▷ • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n \, dt$, posons $u = -\ln(\sin(t))$ donc

$$du = -\frac{\cos(t)}{\sin(t)}dt = -\frac{\sqrt{1-\sin^2(t)}}{\sin(t)}dt = -\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2u}}}{\mathrm{e}^{-u}}dt = -\sqrt{\mathrm{e}^{2u}(t)-1}dt$$

ce qui donne

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\, \mathrm{d}u$$

• On a $\dfrac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}} = \mathrm{e}^{-u}u^n - \dfrac{u^n\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}$.

Posons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}u^n du$, on verifie facilement que cette intégrale converge , $I_n = nI_{n-1}$ et $I_n = n!$, donc

$$(-1)^n D_n = n! + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\, \mathrm{d}u$$

puis que $e^{2u} - 1 \geq 2u$ pour tout $u \geq 0$ alors

$$\frac{u^n\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}} \leq u^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-u}$$

L'inégalité de Cauchy Shwarz donne

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} u^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-u}du &= \int_0^{+\infty} \left(u^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u}\right)\left(u^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u}\right) du \\
&\leq \left(\int_0^{+\infty} u^{n-1}\mathrm{e}^{-u}du \int_0^{+\infty} u^n\mathrm{e}^{-u}du\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{(n!)(n-1)!} \\
&\leq \frac{n!}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-u}}{\sqrt{e^{2u}-1}} du = o(n!)$ et

$$\boxed{D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n n!}$$

12 ▷ Soit $x \in]-1, 1[$ on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\pi/2} e^{x \ln(\sin(t))} \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln(\sin(t)))^n}{n!} \, dt \end{aligned}$$

posons $f_n(t) = \frac{(x \ln(\sin(t)))^n}{n!}$, f_n est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sum f_n$ converge simplement sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $t \mapsto (\sin(t))^x$ qui est intégrable sue $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

En fin

$$\int_0^{\pi/2} |f_n(t)| \, dt = \frac{|x|^n}{n!}(-1)^n D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^n$$

donc $\displaystyle\sum \int_0^{\pi/2} |f_n(t)| \, dt$ converge , le théorème d'interversion des symboles $\sum$ et $\int$ donne :

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n}$$

4. Convergence de suite de fonctions

Soit $a > 0$, $b > 0$, $\rho = \frac{b-a}{b+a}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(x) = \ln\left(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x\right)$.

13 ▷ • Ψ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\Psi(x) = \ln\left(\frac{a^2}{2}(\cos(2x)+1) + \frac{b^2}{2}(1-\cos(2x))\right) = \ln\left(\frac{a^2-b^2}{2}\cos(2x) + \frac{a^2+b^2}{2}\right)$

donc

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= \frac{\left(b^2-a^2\right)\sin(2x)}{\frac{a^2-b^2}{2}\cos(2x) + \frac{a^2+b^2}{2}} \\ &= \frac{2\left(b^2-a^2\right)\sin(2x)}{(a^2-b^2)\cos(2x) + \frac{(b+a)^2+(b-a)^2}{2}} \\ &= \frac{4\left(b^2-a^2\right)\sin(2x)}{(b+a)^2 - 2\left(b^2-a^2\right)\cos(2x) + (b-a)^2} \\ &= \frac{4\rho\sin(2x)}{1-2\rho\cos(2x)+\rho^2} \end{aligned}$$

ainsi $\Psi'(x) = 4 \operatorname{Im} \dfrac{1}{1-\rho e^{2ix}}$.

De plus $|\rho| < 1$ donc $\dfrac{1}{1-\rho e^{2ix}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k e^{2ikx}$ d'où

$$\boxed{\Psi'(x) = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx)}$$

14 ▷ Posons $g_n : x \mapsto \rho^k \sin(2kx)$, on a $|g_n(x)| \leq |\rho|^k$ et $|\rho| < 1$ donc $\sum g_n$ converge normalement et uniformément sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, le théorème d'interversion des symboles $\int$ et $\sum$ donne :

$$\Psi(x) - \Psi(0) = 4\int_0^x \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx)\, dx = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \int_0^x \sin(2kx)\, dx.$$

$\Psi(0) = 2\ln(a)$, donc

$$\Psi(x) = 2\ln(a) - 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx) - 1}{2k}\rho^k$$

on sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} = -\ln(1-\rho) = -\ln(\frac{2a}{b+a})$, d'où

$$\boxed{\Psi(x) = 2\ln\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k.}$$

15 ▷ Puisque $|\rho| < 1$ alors

$$|\Psi(x)| \leq \left|2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\rho|^k}{k} = \left|2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| - 2\ln(\rho).$$

Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \Psi(x)\frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k$ converge normalement et uniformément sur $\mathbb{R}$, donc

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^\pi \Psi(x)dx - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k}\int_0^\pi \cos(2kx)\Psi(x)dx$$

Soit n dans $\mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\cos(2nx)\cos(2kx)}{k}\rho^k$ converge normalement et uniformément sur $\mathbb{R}$, alors

$$\int_0^\pi \cos(2nx)\Psi(x)dx = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^\pi \cos(2nx)dx - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k}\int_0^\pi \cos(2kx)\cos(2nx)dx$$

et on a

$$\int_0^\pi \cos(2kx)\cos(2nx)dx = \int_0^\pi \tfrac{\cos(2(n+k)x)+\cos(2(n-k)x)}{2}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } n = k \\ 0 \text{ si } n \neq k \end{cases}$$

par suite

$$\int_0^\pi \Psi(x)dx = 2\pi\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \cos(2nx)\Psi(x)dx = -\pi\frac{\rho^n}{n} \quad \text{si } n \neq 0$$

ainsi

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^{2k}}{k^2} = 4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sigma\left(\rho^2\right).$$

16 ▷ Pour $n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{n+1}$ et $b_n = \frac{n}{n+1}$.

- Soit $t \in]0, \pi[$ on a

$$\Psi_n(t) = \ln\left(a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 2\ln(\sin(t))$$

donc (Ψ_n) converge simplement sur $]0, \pi[$.

- On a : $f''(0) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^2\, dt$, la suite $\left(\Psi_n^2\right)$ converge simplement sur $]0, \pi[$ vers la fonction $t \mapsto 4\left(\ln(\sin(t))\right)^2$.

Pour $n \geq 2$

$$|\Psi_n(x)| \leq \left|2\ln\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\right| - 2\ln\left(\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}\right) = 2\ln(2) - \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$$

comme $\frac{1}{2} \leq \frac{n-1}{n+1} \leq 1$.donc

$$|\Psi_n(x)| \leq 3\ln(2)$$

le théorème de la convergence dominée sur $]0, \pi[$ donne :

$$f''(0) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} (\Psi_n(x))^2\, dx$$

De la question 15 on a

$$\int_0^{\pi} \Psi_n(x)^2 dx = 4\pi\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sigma\left(\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\right).$$

la fonction σ est continue sur $[-1, 1]$ donc

$$f''(0) = 4\pi\left(\ln(2)\right)^2 + 2\pi\sigma(1)$$

d'où $\boxed{f''(0) = 4\pi\left(\ln(2)\right)^2 + \frac{\pi^3}{3}}$.

5. Convexité logarithmique

17 ▷ f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $(\ln(f(x))'' = \frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}$, on écrit

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)).(\sin(t))^{x/2})((\sin(t))^{x/2} dt$$

l'inégalité de Cauchy Schwarz donne

$$\left(f'(x)\right)^2 \leq \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))^2.(\sin(t))^x dt \,.\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x dt \; = f''(x)f(x)$$

d'où $(\ln(f(x))'' \geq 0 \;\; \forall x \in I$ et f est ln-convexe de I dans $\mathbb{R}$.

18 ▷ Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a $(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2)$ donc $\ln(f(x+2)) - \ln(f(x)) = \ln(x+1) - \ln(x+2)$ ce qui donne

$$\tilde{f}(x+1) - \tilde{f}(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on applique cette relation pour $x+k$ et on la somme pour $k \in [\![0; p-1]\!]$:

$$\tilde{f}(x+p) - \tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right).$$

19 ▷ • Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $x \leqslant p$.

On utilise l'inégalité des pentes pour une fonction convexe :

Soit g une fonction définie sur un intervalle I. Si g est convexe alors, pour tous $a < c < b$ dans I :

$$\frac{g(c)-g(a)}{c-a} \leq \frac{g(b)-g(c)}{b-c}$$

Pour $n \leq n+x \leq p+n$ on a

$$\frac{\tilde{f}(n+x)-\tilde{f}(n)}{x} \leq \frac{\tilde{f}(n+p)-\tilde{f}(n)}{p}$$

et pour $n-1 \leq n \leq n+x$:

$$\frac{\tilde{f}(n)-\tilde{f}(n-1)}{1} \leq \frac{\tilde{f}(n+x)-\tilde{f}(n)}{x}$$

ainsi

$$\tilde{f}(n)-\tilde{f}(n-1) \leqslant \frac{\tilde{f}(n+x)-\tilde{f}(n)}{x} \leqslant \frac{\tilde{f}(n+p)-\tilde{f}(n)}{p}$$

• On a $\tilde{f}(n)-\tilde{f}(n-1) = \ln\left(\frac{2n-1}{2n}\right)$, $\tilde{f}(n+p)-\tilde{f}(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2n+2k+1}{2n+2k+2}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc $\tilde{f}(n+x)-\tilde{f}(n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

(*On peut utiliser l'équivalent de f en $+\infty$ ce qui n'est pas vérifié par toutes les fonctions cherchées)*

20 ▷ Pour $p \geq 0$ et $x \geq 0$ on a

$$\tilde{f}(x+p) - \tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right).$$

donc

$$\tilde{f}(p) - \tilde{f}(0) = \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right).$$

ce qui donne

$$\tilde{f}(x+p) - \tilde{f}(p) + \tilde{f}(0) - \tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{1+\frac{2x}{2k+1}}{1+\frac{2x}{2k+2}}\right).$$

or $\tilde{f}(x+p) - \tilde{f}(p) \underset{p\to+\infty}{\to} 0$ donc

$$\tilde{f}(x) = \ln(f(2x)) = \ln(\frac{\pi}{2}) - \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(\frac{1+\frac{2x}{2k+1}}{1+\frac{2x}{2k+2}}\right).$$

par suite $\tilde{f}(x)$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}\prod_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1+\frac{x}{2k+2}}{1+\frac{x}{2k+1}}\right)\quad,\forall x\in\mathbb{R}_+\ \ (*)$$

Si $x\in\,]-1,0]$, on a $f(x)=\frac{x+2}{x+1}f(x+2)$; soit $n>0$ on a

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x+1}\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1+\frac{x+2}{2k+2}}{1+\frac{x+2}{2k+1}}\right) &= \frac{x+2}{x+1}\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{\frac{x+2(k+1)+2}{2k+2}}{\frac{x+2(k+1)+1}{2k+1}}\right)\\ &= \frac{x+2}{x+1}\prod_{k=1}^{n+1}\left(\frac{\frac{x+2k+2}{2k}}{\frac{x+2k+1}{2k-1}}\right)\\ &= \prod_{k=0}^{n+1}\left(\frac{\frac{x+2k+2}{2k+2}}{\frac{x+2k+1}{2k+1}}\right)\prod_{k=1}^{n+1}\left(\frac{\frac{2k+2}{2k}}{\frac{2k+1}{2k-1}}\right)\\ &= \prod_{k=0}^{n+1}\left(\frac{1+\frac{x+2}{2k+2}}{1+\frac{x+2}{2k+1}}\right)\frac{2n+4}{2n+3}\end{aligned}$$

par passage à la limite on obtient la formule (*) pour x dans $]-1,0]$, d'où f est définie d'une manière unique par :

$$\boxed{f(x)=\frac{\pi}{2}\prod_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1+\frac{x}{2k+2}}{1+\frac{x}{2k+1}}\right)\ ,\forall x\in I}$$

21 ▷ Soit $T\in\mathbb{R}_+^*$, et g de $]-T,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, ln-convexes et vérifiant

$$\forall t\in\,]-T,+\infty[\,,(t+T)g(t)=(t+2T)g(t+2T)$$

et on a $g(0)\neq 0$.

Soit $\varphi(x)=\frac{\pi}{2g(0)}g(Tx)$, elle est ln-convexes et si $\in\,]-1,+\infty[\,,(x+1)g(Tx)=(x+2)g(Tx+2T)$ donc $(x+1)\varphi(x)=(x+2)\varphi(x+2)$ et $\varphi(0)=\frac{\pi}{2}$.

D'après la question précédente $\varphi=f$, par suite $\boxed{g(t)=\frac{2g(0)}{\pi}f\left(\frac{t}{T}\right)}$

22 ▷ Si h, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ln $\circ h$ est convexe , donc définie et continue sur $\mathbb{R}$, la relation

$$\forall t\in\mathbb{R},(t+T)h(t)=(t+2T)h(t+2T)$$

donne $h(T)=h(-2T)=0$, ce qui est absurde . Une telle fonction n'existe pas.

FIN