Concours commun Mines et Ponts 2023

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2 - PSI

m.laamoum@gmail.com.

Distance entre deux distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$.

1. Nombre de points fixes d'une permutation

1 ▷ On a $\text{Card}(\mathcal{S}_n) = n!$par suite $d_n \leq n!$ et $0 < \frac{d_n}{n!} \leq 1$ donc $\text{R}_{\text{cv}}\left(\sum\limits_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n\right) \geq \text{R}_{\text{cv}}\left(\sum\limits_{n\geq 0} x^n\right)$, d'où $R \geq 1$.

2 ▷ • Soit $k \in [\![0, n]\!]$ et $\mathcal{P}_k$ l'ensemble de toutes les parties de $[\![1, n]\!]$ ayant exactement k éléments , on a $\text{Card}(\mathcal{P}_k) = \binom{n}{k}$.

L'événement $[X_n = k]$ est l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ ayant exactement k points fixes. Pour tout $I \in \mathcal{P}_k$ notons $F(I) = \{\sigma \in [X_n = k] \ , \forall i \in I \ \ \sigma(i) = i\}$, c'est l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ dont les points fixes sont exactement les éléments de I .

On a $[X_n = k] = \bigcup\limits_{I\in\mathcal{P}_k} F(I)$ et $F(I) \cap F(J) = \varnothing$ si $I \neq J$ donc

$$\text{Card}([X_n = k]) = \sum_{I\in\mathcal{P}_k} \text{Card}(F(I))$$

Si $\sigma \in F(I)$ alors $\sigma_{|I} = id_I$ et $\sigma_{|\overline{I}}$ la restriction de σ à $\overline{I}$, le complémentaire de I , est un dérangement de $\overline{I}$, ainsi l'application $\sigma \mapsto \sigma_{|\overline{I}}$ établit une bijection de $F(I)$ sur l'ensemble des dérangements de $\overline{I}$, ce dernier est en bijection avec l'ensemble des dérangements de $[\![1, n-k]\!]$, donc $\text{Card}(F(I)) = d_{n-k}$ et

$$\text{Card}([X_n = k]) = \sum_{I\in\mathcal{P}_k} d_{n-k} = d_{n-k} \sum_{I\in\mathcal{P}_k} 1 = d_{n-k} \ \text{Card}(\mathcal{P}_k)$$

d'où

$$\boxed{\text{Card}([X_n = k]) = \binom{n}{k} d_{n-k}.}$$

• $\mathbb{P}_n$ est la probabilité uniforme sur $\mathcal{S}_n$ donc

$$\mathbb{P}_n(X_n = k) = \frac{\text{Card}([X_n = k])}{\text{Card}(\mathcal{S}_n)} = \frac{1}{n!}\binom{n}{k} d_{n-k}.$$

ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}_n(X_n = k) = \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}}$$

3 ▷ On a $([X_n = k])_{0\leq k\leq n}$ est un système complet d'événements (*ils sont deux à deux disjoints et de réunion égale à* $\mathcal{S}_n$) donc $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}_n(X_n = k) = 1$ et

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!} = 1$$

Soit $x \in \left]-1,1\right[$, on a $s(x)e^x = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)$ ($R \geq 1$ *donc* s *est définie sur* $\left]-1,1\right[$ *et* exp *est de rayon de convergence infini*) , le théorème du produit de Cauchy donne : $s(x)e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ avec $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!} = 1$ d'où

$$\boxed{s(x)e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.}$$

On a $R \geq 1$, si on suppose que $R > 1$ alors s est définie et continue en 1, mais la formule précédente donne $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} s(x) = +\infty$, ce qui est absurde, donc $R = 1$.

4 ▷ Soit $x \in \left]-1,1\right[$ on a

$$\begin{aligned}(1-x)s(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_{n-1}}{(n-1)!}x^n\\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!}\right)x^n\end{aligned}$$

Puisque $(1-x)s(x) = e^{-x}$ alors $(1-x)s(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n$, par unicité des coefficients d'un DSE on a

$$\frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!} \quad \forall n \geq 1$$

une sommation de cette relation entre 1 et n donne $\dfrac{d_n}{n!} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$, ainsi

$$\boxed{d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

5 ▷ Soit $k \in [\![0, n]\!]$, d'après la question **2.** on a $\mathbb{P}_n(X_n = k) = \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}$ donc

$$\mathbb{P}_n(X_n = k) = \frac{1}{k!(n-k)!}\left((n-k)! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}\right)$$

d'où

$$\boxed{\mathbb{P}_n\left(X_n = k\right) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.}$$

6 ▷ Si $i \in [\![1,n]\!]$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on a $U_i(\sigma) = 1$ si $\sigma(i) = i$, et $U_i(\sigma) = 0$ sinon.

• On a $U_i(\mathcal{S}_n) = \{0,1\}$, l'événement $[U_i = 1] = \{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma(i) = i\}$ est en bijection avec $\mathcal{S}_{n-1}$ (*par l'application qui à σ associe sa restriction à $[\![1,n]\!] \setminus \{i\}$*) , donc $\mathrm{Card}([U_i = 1]) = (n-1)!$.

Ainsi $\mathbb{P}_n(U_i = 1) = \dfrac{\mathrm{Card}([U_i = 1])}{\mathrm{Card}(\mathcal{S}_n)} = \dfrac{1}{n}$ et $\mathbb{P}_n(U_i = 0) = 1 - \mathbb{P}_n(U_i = 1) = 1 - \dfrac{1}{n}$.

U_i suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$.

• On suppose ici $n \geq 2$. Soit $i \neq j$, on a $U_iU_j(\mathcal{S}_n) = \{0,1\}$ et

$$[U_iU_j = 1] = [U_i = 1] \cap [U_j = 1] = \{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma(i) = i \text{ et } \sigma(j) = j\}$$

comme précédement $[U_iU_j = 1]$ est en bijection avec $\mathcal{S}_{n-2}$ donc il est de cardinal $(n-2)!$ ce qui donne

$$\mathbb{P}_n(U_iU_j = 1) = \frac{1}{n(n-1)}$$

Donc U_iU_j suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n(n-1)}$.

7 ▷ • Soit $k \in [\![0,n]\!]$, si $\sigma \in [X_n = k]$ alors il existe $\{i_1, ..., i_k\} \subset [\![1,n]\!]$ tel que $U_{i_1}(\sigma) = ... = U_{i_k}(\sigma) = 1$ et $U_j(\sigma) = 0$ si $j \notin \{i_1, ..., i_k\}$, donc

$$X_n(\sigma) = U_{i_1}(\sigma) + ... + U_{i_k}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} U_i(\sigma)$$

ainsi

$$\boxed{X_n = \sum_{i=1}^{n} U_i}$$

• <u>Espérance :</u> on a $U_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\mathbb{E}(U_i) = \frac{1}{n}$ donc $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(U_i) = 1$.

<u>Variance :</u> on a $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2$ et $X_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} U_i^2 + 2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} U_iU_j$, or $U_i^2 = U_i$ pout tout i , donc $X_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} U_i + 2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} U_iU_j$ et

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(U_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(U_iU_j) = 1 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(U_iU_j).$$

de plus $U_iU_j \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n(n-1)}\right)$ pout tout $i < j$, donc $\mathbb{E}(U_iU_j) = \frac{1}{n(n-1)}$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} \mathbb{E}(U_iU_j) &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} 1 \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i+1}^{n} 1\right) \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (n-i) \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} i \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ainsi $\mathbb{E}\left(X_n^2\right) = 2$ et $\mathbb{V}\left(X_n\right) = 1$. Conclusion

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X_n\right) = 1 \text{ ,} \mathbb{V}\left(X_n\right) = 1}$$

8 ▷ Soit k un entier naturel , pour $n \geq k$ on a $\mathbb{P}_n\left(X_n = k\right) = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k} \dfrac{(-1)^i}{i!}$ donc

$$y_k = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_n\left(X_n = k\right) = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

par suite

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

et Y suit la loi de Poisson de paramètre 1.

9 ▷ • Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $G_{X_n}(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}_n\left(X_n = k\right) t^k$ et $\mathbb{P}_n\left(X_n = k\right) = \frac{1}{k!} \sum\limits_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$ donc

$$G_{X_n}(t) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{k!i!} t^k \overset{(j=n-i)}{=} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{k!(n-j)!} t^k$$

remarquons que

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \leq k \leq n \\ k \leq j \leq n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leq j \leq n \\ 0 \leq k \leq j \end{array}\right.$$

donc

$$G_{X_n}(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!} \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{t^k}{k!}\right) \overset{(j=n-i)}{=} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \left(\sum_{k=0}^{n-i} \frac{t^k}{k!}\right)$$

D'autre part $Y \sim \mathcal{P}(1)$ donc

$$G_Y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k)t^k = e^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} = e^{t-1}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$G_{X_n}(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right).$$

le reste $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$ converge vers 0, quad n tend vers $+\infty$, donc pour $\varepsilon > 0$ il existe N tel que , si $n \geq N$ alors $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right| \leq \frac{\varepsilon}{e}$, par suite

$$\left| \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right) \right| \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right| \leq \frac{\varepsilon}{e} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \leq \varepsilon$$

donc $\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right)$ converge vers 0 , quad n tend vers $+\infty$, ce qui donne

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} G_{X_n}(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} = e^{t-1} = G_Y(t)}$$

2. Convergence en variation totale

10 ▷ Soient x, y, z trois distributions sur $\mathbb{N}$.

- Par inégalité triangulaire on a : $|x(k) - y(k)| \leq x(k) + y(k)$ pour tout k dans $\mathbb{N}$ donc

$$\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(x, y) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} y(k) = 1$$

ainsi $0 \leq \mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(x, y) \leq 1$;

- Séparabilité : on a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(x, y) &= 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k) - y(k)| = 0 \\ &\Leftrightarrow |x(k) - y(k)| = 0, \ \forall k \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow x(k) = y(k), \ \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

d'où $\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

- Symétrie : $\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(x, y) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |x(k) - y(k)| = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |y(k) - x(k)| = \mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(x, y)$.

- Inégalité triangulaire : on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(x,z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k)-y(k)+y(k)-z(k)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} (|x(k)-y(k)|+|y(k)-z(k)|) \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k)-y(k)|+\sum_{k=0}^{+\infty} |y(k)-z(k)|
\end{aligned}$$

d'où $\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(x,z) \leq \mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(x,y)+\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(y,z)$.

11 ▷ Soient X et Y deux variables de Bernoulli, $X \sim \mathcal{B}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{B}(\mu)$ avec $\lambda, \mu \in]0,1[$.
On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(p_X, p_Y) &= \frac{1}{2}|p_X(1)-p_X(1)|+\frac{1}{2}|p_X(0)-p_X(0)| \\
&= \frac{1}{2}|\mathbb{P}(X=1)-\mathbb{P}(Y=1)|+\frac{1}{2}|\mathbb{P}(X=0)-\mathbb{P}(Y=0)| \\
&= \frac{1}{2}|\lambda-\mu|+\frac{1}{2}|(1-\lambda)-(1-\mu)|
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(p_X, p_Y)=|\lambda-\mu|}$$

12 ▷ • Soit X une variable de Bernoulli de paramètre $\lambda \in]0,1[$.
On a $\pi_\lambda(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $p_X(1)=\lambda$, $p_X(0)=1-\lambda$ et $p_X(k)=0$ pour $k \geq 2$, donc ,

$$\begin{aligned}
2\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(p_X\ , \pi_\lambda) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |p_X(k)-\pi_\lambda(k)| \\
&= |p_X(0)-\pi_\lambda(0)|+|p_X(1)-\pi_\lambda(1)|+\sum_{k=2}^{+\infty} \pi_\lambda(k) \\
&= |p_X(0)-\pi_\lambda(0)|+|p_X(1)-\pi_\lambda(1)|+1-\pi_\lambda(0)-\pi_\lambda(1) \\
&= \left|1-\lambda-e^{-\lambda}\right|+\left|\lambda-\lambda e^{-\lambda}\right|+1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Soit $\varphi : x \mapsto x+e^{-x}-1$, on a $\varphi'(x)=1-e^{-x} \geq 0$ pour tout $x \in]0,1[$, φ est croissante sur $]0,1[$ et $\varphi(0)=0$ donc $\varphi(x) \geq 0$ sur $]0,1[$.
Donc

$$2\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(p_X\ , \pi_\lambda)=\lambda+e^{-\lambda}-1+\lambda-\lambda e^{-\lambda}+1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}$$

et

$$\boxed{\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(p_X\ , \pi_\lambda)=\lambda\left(1-e^{-\lambda}\right)}$$

- On a $\varphi(\lambda) \geq 0$ donc $1-e^{-\lambda} \leq \lambda$ d'où $\boxed{\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(p_X, \pi_\lambda) \leq \lambda^2}$.

13 ▷ On $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad p_{X_n}(k) = \mathbb{P}_n\left(X_n = k\right) = \frac{1}{k!}\sum\limits_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$, $p_{X_n}(k) = 0$ si $k > n$ et $\pi_1(k) = \frac{e^{-1}}{k!}$, donc

$$\begin{aligned} 2\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(p_{X_n}, \pi_1\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left|p_{X_n}(k) - \pi_1(k)\right| \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left|p_{X_n}(k) - \pi_1(k)\right| + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\pi_1(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{e^{-1}}{k!} - \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}\right| + e^{-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

sachant que $e^{-1} = \sum\limits_{i=0}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}$ alors

$$\boxed{2\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(p_{X_n}, \pi_1\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right| + e^{-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}.}$$

14 ▷ • Soit n un entier naturel, on a $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+n+1)!}$.

Ecrivons pour tout $k \geq 0$, $(k+n+1)! = (n+1)!\underbrace{(n+2)...(n+k+1)}_{k\text{ termes}}$ donc $(k+n)! \geq (n+1)!(n+2)^k$,

ainsi

$$r_n \leq \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)^k}$$

• On a $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$, par suite

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq r_n \leq \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} \quad (*)$$

Ainsi

$$\boxed{r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)!}}$$

15 ▷ De la question **13.** on a ,

$$\begin{aligned} 2\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(p_{X_n}, \pi_1\right) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right| + e^{-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}r_{n-k} + e^{-1}r_n \end{aligned}$$

la relation (*) donne $0 \leq r_n \leq \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} \leq \frac{2}{(n+1)!}$ donc

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}r_{n-k} \leq 2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k+1)!} \leq 2\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!(n-k+1)!}$$

on a

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!(n-k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

ce qui donne pour n assez grand

$$2\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(p_{X_n}, \pi_1\right) \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{2e^{-1}}{(n+1)!} \leq \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(pX_n, \pi_1\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right)}$$

3. Autres estimations de distances en variation totale

16 ▷ Soit x et y sont deux distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$, $x * y$ est définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}^+$.
Les séries $\sum x(n)$ et $\sum y(n)$ convergent absolument, le théorème du produit de Cauchy donne : la série $\sum v_n$, avec $v_n = \sum\limits_{i+j=n} x(i)y(j)$, converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n). \sum_{n=0}^{+\infty} y(n) = 1$$

comme $v_n = (x*y)(n)$ alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (x*y)(n) = 1$.
Ainsi $x * y$ est une distribution sur $\mathbb{N}$.

17 ▷ Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Pour tout n dans $\mathbb{N}$,on a $p_{X+Y}(n) = \mathbb{P}(X+Y=n)$. Soit $\omega \in [X+Y=n]$ alors il existe $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $X(\omega) = k$ et $Y(\omega) = n-k$ donc

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k, Y=n-k)$$

et $\mathbb{P}(X=k, Y=n-k) = \mathbb{P}(\,[X=k] \cap [Y=n-k])$, l'indépendance de X et Y donne
$\mathbb{P}(X=k, Y=n-k) = \mathbb{P}\left(X=k\right)\mathbb{P}\left(Y=n-k\right)$, par suite

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(X=k\right)\mathbb{P}\left(Y=n-k\right)$$

qui s'écrit

$$p_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^{n} p_X(k) p_X\left(n-k\right) = p_X * p_Y(n)$$

d'où $\boxed{p_{X+Y} = p_X * p_Y}$.
On peut le faire en utilisant les fonctions génératrices et la relation $G_{X+Y} = G_X G_Y$, vérfiée par des variables indépendantes .

18 ▷ Soient $(x,y,u,v)\in(\mathcal{D}_{\mathbb{N}})^4$ et k entier naturel, on a

$$\begin{aligned}|(x*y)(k)-(u*v)(k)| &= \left|\sum_{i+j=k}(x(i)-u(i)+u(i))\,y(j)-\sum_{i+j=k}u(i)v(j)\right|\\ &= \left|\sum_{i+j=k}(x(i)-u(i))\,y(j)+\sum_{i+j=k}u(i)\,(y(j)-v(j))\right|\\ &\leq \sum_{i+j=k}y(j)|x(i)-u(i)|+\sum_{i+j=k}u(i)|y(j)-v(j)|.\end{aligned}$$

19 ▷ On a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(x*y,u*v) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|(x*y)(k)-(u*v)(k)|\\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i+j=k}y(j)|x(i)-u(i)|+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i+j=k}u(i)|y(j)-v(j)|\end{aligned}$$

La formule du produit de Cauchy donne

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i+j=k}y(j)|x(i)-u(i)| &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty}y(k)\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}|x(k)-u(k)|\right)\\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty}|x(k)-u(k)|\right)\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(x*y,u*v) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|(x*y)(k)-(u*v)(k)|\\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|x(k)-u(k)|+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|y(k)-v(k)|\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(x*y,u*v)\leq \mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(x,u)+\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(y,v)}$$

20 ▷ Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\lambda\in\,]0,1[$, $U\sim\mathcal{B}(n,\lambda)$ donc $p_U(k)=\binom{n}{k}\lambda^k\,(1-\lambda)^{n-k}$ si $k\in[\![0,n]\!]$.
Soit $X_1,...,X_n$ des variables indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre λ , on sait que $X_1+...+X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,\lambda)$ *(c'est du cours)* donc $p_U=p_{X_1+...+X_n}$.
Soit $Y_1,...,Y_n$ des variables indépendantes qui suivent la loi de Poison de paramètre λ , on sait que $Y_1+...+Y_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{P}(n\lambda)$ donc $\pi_{n\lambda}=p_{Y_1+...+Y_n}$.
D'après la question **17.** $p_U=p_{X_1+...+X_{n-1}}*p_{X_n}$ car $X_1+...+X_{n-1}$ et X_n sont indépendantes , de même $\pi_{n\lambda}=p_{Y_1+...+Y_{n-1}}*p_{Y_n}=p_{Y_1+...+Y_{n-1}}*\pi_\lambda$.
La question **19.** donne

$$\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(p_U,\pi_{n\lambda}\right)\leq \mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(p_{X_1+...+X_{n-1}},p_{Y_1+...+Y_{n-1}})+\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(p_{X_n},\pi_\lambda)$$

D'après la question **12.** on a $\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(p_{X_n}, \pi_\lambda) \leq \lambda^2$, donc

$$\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(p_U, \pi_{n\lambda}\right) \leq \mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(p_{X_1+\ldots+X_{n-1}}, p_{Y_1+\ldots+Y_{n-1}}) + \lambda^2$$

ainsi par récurrence on obtient :

$$\boxed{\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(p_U, \pi_{n\lambda}\right) \leq n\lambda^2}$$

21 ▷ Soit $\alpha > 0$, $n > \lfloor \alpha \rfloor$ et $B_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{\alpha}{n})$, on applique le résultat précédent avec $\lambda = \frac{\alpha}{n} \in]0, 1[$.

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} |p_{B_n}(k) - \pi_\alpha(k)| = \mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(p_{B_n}, \pi_\alpha\right) \leq \frac{\alpha^2}{n}$$

donc pour tout k dans $\mathbb{N}$ on a $|p_{B_n}(k) - \pi_\alpha(k)| \leq \frac{2\alpha^2}{n}$ ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{B_n}(k) = \pi_\alpha(k)$.
Ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(B_n = k\right) = e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!}}$$

22 ▷ Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n > \max(\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor \beta \rfloor)$, $X_1, ..., X_n$ des variables indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\alpha}{n}$ et $Y_1, ..., Y_n$ des variables indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\beta}{n}$.
Posons $B_n = X_1 + ... + X_n$ et $C_n = Y_1 + ... + Y_n$, on sait que $B_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{\alpha}{n})$ et $C_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{\beta}{n})$.
On a

$$\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq \mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(p_{B_n}, \pi_\alpha\right) + \mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(p_{C_n}, \pi_\beta\right) + \mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(p_{B_n}, p_{C_n}\right)$$

d'après la question **20.** $\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(p_{B_n}, \pi_\alpha\right) \leq \frac{\alpha^2}{n}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(p_{C_n}, \pi_\beta\right) \leq \frac{\beta^2}{n}$, avec la même méthode de la question **20.** on a

$$\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(p_{B_n}, p_{C_n}\right) \leq \mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(p_{X_1+\ldots+X_{n-1}}, p_{Y_1+\ldots+Y_{n-1}}) + \mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(p_{X_n}, p_{Y_n})$$

d'après la question **11.** $\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(p_{X_n}, p_{Y_n}) = \left|\frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n}\right|$, donc

$$\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(p_U, \pi_{n\lambda}\right) \leq \mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(p_{X_1+\ldots+X_{n-1}}, p_{Y_1+\ldots+Y_{n-1}}) + \left|\frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n}\right|$$

par récurrence on obtient

$$\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(p_U, \pi_{n\lambda}\right) \leq n\left|\frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n}\right| = |\beta - \alpha|$$

ainsi

$$\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq |\beta - \alpha| + \frac{\alpha^2}{n} + \frac{\beta^2}{n}$$

ceci est valable pour tout $n > \max(\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor \beta \rfloor)$, par passage à la limite on a

$$\boxed{\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(\pi_\alpha, \pi_\beta\right) \leq |\beta - \alpha|}$$

FIN