cpge-paradise.com

Mines-Ponts PSI : Physique 1 2023
Proposition de corrigé

clementpicard69000@gmail.com

Partie I : La circulation capillaire

Q 1. En notant v la vitesse caractéristique de l'écoulement, on a :

$$\boxed{Re = \frac{\rho R v}{\eta}}$$

Ce nombre permet de comparer les effets de viscosité et de convection dans un écoulement.

Q 2. Dans un premier temps, on détermine le nombre de vaisseaux N. On connait la section σ de l'ensemble des vaisseaux, donc :

$$N = \frac{\sigma}{\pi R^2} = \frac{5\times10^{-1}}{\pi(10^{-5})^2} \simeq \frac{5\times10^9}{3}$$

De plus, on connait la longueur total des capillaires, que l'on notera L_{tot}. En notant L_{cap} la longueur d'un capillaire, il vient :

$$\boxed{L_{cap} = \frac{L_{tot}}{N} \simeq \frac{3\times10^8}{5\times10^9} \simeq 0,6\times10^{-1} = 0,06m = 6 \text{ cm}.}$$

Q 3. Il y a 60 battements par minute, soit un battement par seconde. Or un battement ejecte 100 mL de sang, on peut donc estimer le débit volumique $D_v = 100$ mL/s.
De plus $D_m = \rho D_v = 1,1\times10^3\times100\times10^{-6}$, soit :

$$\boxed{D_m = 1,1\times10^{-1} \text{ kg/s}}$$

On définit alors la vitesse moyenne de l'écoulement $v = \frac{D_v}{\sigma} = \frac{100\times10^{-6}}{5\times10^{-1}} = 2\times10^{-4}$ m/s.
On utilise cette vitesse pour estimer le nombre de Reynolds :

$$\boxed{Re = \frac{\rho R v}{\eta} = \frac{1,1\times10^3\times10^{-5}\times2\times10^{-4}}{1,6\times10^{-3}} = \frac{22}{16}\times10^{-3} \simeq 1,5\times10^{-3}}$$

Ce nombre est très petit devant 1, on se situe donc en régime laminaire.

Q 4. On calcule la dérivée totale $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$
Comme $\vec{v}$ ne dépend pas de t, $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$
De plus, l'écoulement est incompressible, donc $div(\vec{v}) = 0$. Or, $\vec{v}$ est selon $\vec{e_z}$, donc on a :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \Rightarrow \vec{v} \text{ ne dépend pas de } z.$$

On calcule $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$:

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = v\frac{d\vec{v}}{dz} = \vec{0}$$

On en conclut alors que :

$$\boxed{\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \overrightarrow{0}.}$$

Le fluide n'est donc pas accéléré.

Q 5. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on définit le système comme un élément de fluide cylindrique de rayon r et compris entre z et $z + dz$. Il y a trois forces qui s'exercent sur ce système selon l'axe $\overrightarrow{e_z}$:

- La force de pression en z : $\overrightarrow{F_z} = P(z)\pi r^2\overrightarrow{e_z}$
- La force de pression en $z + dz$: $\overrightarrow{F_{z+dz}} = -P(z + dz)\pi r^2\overrightarrow{e_z}$
- La force de pviscosité exercée par le fluide autour du système : $\overrightarrow{F_\eta} = \eta\frac{\partial v}{\partial r}2\pi r dz\overrightarrow{e_z}$

Or, on a montré précédemment que le fluide n'est pas accéléré, donc le principe fondamental de la statique projeté sur $\overrightarrow{e_z}$ donne :

$$[P(z) - P(z + dz)]\pi r^2 + \eta\frac{\partial v}{\partial r}2\pi r dz = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{dP}{dz}\pi r^2 dz + \eta\frac{\partial v}{\partial r}2\pi r dz = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{dP}{dz} = \frac{2\eta}{r}\frac{\partial v}{\partial r}}$$

Comme P ne dépend que de z, et v que de r, alors on a égalité entre deux fonctions dépendant de variables différentes et indépendantes, donc ces deux fonctions sont des constantes. Ainsi, le gradient de pression est bien constant.

Q 6. On reprend l'expression précédente : $\Rightarrow \frac{dP}{dz} = \frac{2\eta}{r}\frac{\partial v}{\partial r}$ soit :

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{dP}{dz}\frac{r}{2\eta}$$

$$\Rightarrow v(r) = \frac{dP}{dz}\frac{r^2}{4\eta} + A$$

Or, l'écoulement est visqueux, donc il s'accroche à la paroi, d'où $v(r = R) = 0$

$$\frac{dP}{dz}\frac{R^2}{4\eta} + A = 0$$

$$A = -\frac{dP}{dz}\frac{R^2}{4\eta}$$

$$\boxed{\Rightarrow v(r) = \frac{dP}{dz}\frac{r^2 - R^2}{4\eta}}$$

Q 7. On a $D_m = \rho\iint \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{dS}$ avec $\overrightarrow{v} = r d\theta dr\overrightarrow{e_z}$, donc :

$$D_m = \frac{\rho}{4\eta}\frac{dP}{dz}\int_0^R\int_0^{2\pi}(r^2 - R^2)r d\theta dr$$

$$\Rightarrow D_m = \frac{\rho\pi}{2\eta}\frac{dP}{dz}\int_0^R(r^3 - rR^2)dr$$

$$\Rightarrow D_m = \frac{\rho\pi}{2\eta}\frac{dP}{dz}[\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{2}]$$

$$\Rightarrow D_m = -\frac{\rho\pi R^4}{8\eta}\frac{dP}{dz}$$

$$\Rightarrow D_m = \frac{\rho\pi R^4}{8\eta}\left|\frac{dP}{dz}\right| \text{ car } \frac{dP}{dz} < 0$$

Or $D_m = \frac{1}{R_u}\left|\frac{dP}{dz}\right|$, on en déduit :

$$\boxed{R_u = \frac{8\eta}{\rho\pi R^4}}$$

Q 8. Pour que l'écoulement se fasse dans le sens des z croissants, il faut que $P(z=0) > P(z=l)$. De plus, comme le gradient de pression est constant, alors $\left|\frac{dP}{dz}\right| = \frac{\Delta P}{l}$, donc :

$$D_m = \frac{\rho\pi R^4}{8\eta}\left|\frac{dP}{dz}\right|$$

$$\Rightarrow \Delta P = \frac{8\eta D_m l}{\pi\rho R^4}$$

Or, le débit de $1,1 \times 10^{-1}$ kg/s est le débit dans N capillaires. Donc il faut diviser par le nombre de capillaires $N = \frac{5\times10^9}{3}$ trouvé à la question 2 :

$$\Rightarrow \Delta P \simeq \frac{8\times1{,}6\times10^{-3}\times1{,}1\times10^{-1}\times5\times10^{-2}\times3}{3\times1{,}1\times10^{3}\times10^{-20}\times5\times10^{9}}$$

$$\Rightarrow D_m \simeq 12,8 \times 10^2$$

$$\boxed{\Delta P = 1,28 \times 10^3 \text{ Pa}}$$

Q 9. On notant p la puissance des forces de pression, on a $p = D_v \Delta P$, donc

$$\boxed{p = \frac{D_m \Delta P}{\rho}}$$

$$\boxed{\Delta P = \frac{R_u D_m^2 l}{\rho}}$$

Q 10.

$$p = D_v \Delta P = 10^{-4} \times 1,28 \times 10^3$$

$$\boxed{p = 1,28 \times 10^{-1} \text{ W}}$$

cpge-paradise.com

Partie II : Le magnétron

Q 11. On souhaite un champ uniforme selon l'axe d'un cylindre. Cela fait penser au modèle du solénoide infini. Ainsi, il faut un bobinage entourant le cylindre comme un solénoide.

Q 12. L'intérieur du dispositif est vide, donc d'après l'équation de Maxwell Gauss : $div(\overrightarrow{E}) = 0$. Or, $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} V$, donc en coordonnées cylindriques, avec le formulaire de début d'énoncé :

$$div(\overrightarrow{E}) = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dV}{dr})$$

L'équation de Maxwell-Gauss devient alors :

$$\frac{d}{dr}(r\frac{dV}{dr}) = 0$$

$$r\frac{dV}{dr}) = A$$

$$\frac{dV}{dr}) = \frac{A}{r}$$

$$V(r) = Aln(r) + B$$

Or, $V(r = a) = 0 \Rightarrow B = -Aln(a)$. De plus, $V(b) = U_0 \Rightarrow Aln(b) - Aln(a) = U_0 \Rightarrow A = \frac{U_0}{ln(b/a)}$
On en déduit que :

$$\boxed{V(r) = U_0\frac{ln(r/a)}{ln(b/a)}}$$

Q 13. Détemrinons le champ électrique $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} V = -\frac{dV}{dr}\overrightarrow{e_r} = -\frac{U_0}{rln(b/a)}\overrightarrow{e_r}$
Ainsi la force électrique s'écrit : $\overrightarrow{F_E} = -e\overrightarrow{E} = \frac{eU_0}{rln(b/a)}\overrightarrow{e_r}$
On détemrine maintenant la force magnétique $\overrightarrow{F_B} = -e\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$

$$\overrightarrow{F_B} = -e\begin{pmatrix}\dot{r}\\ r\dot{\theta}\\ 0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\ 0\\ B_0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{F_B} = -e\begin{pmatrix}r\dot{\theta}B_0\\ -\dot{r}B_0\\ 0\end{pmatrix}$$

En considérant que la vitesse initiale est négligeable, comme les deux forces n'ont pas de composantes selon $\overrightarrow{e_z}$, alors le mouvement reste dans le plan $(\overrightarrow{e_r}; \overrightarrow{e_\theta})$

Q 14. $\frac{d\overrightarrow{L_C}}{dt} = \overrightarrow{M_C}(\overrightarrow{F_E}) + \overrightarrow{M_C}(\overrightarrow{F_B})$
On détermine les moments de chaque force et moment cinétique :

$$\overrightarrow{M_C}(\overrightarrow{F_E}) = \overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{F_E}) = \begin{pmatrix}r\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}\frac{eU_0}{rln(b/a)}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$$

cpge-paradise.com

$$\overrightarrow{M_C}(\overrightarrow{F_B}) = \overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{F_B}) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -er\dot{\theta}B_0 \\ e\dot{r}B_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ re\dot{r}B_0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{L_C} = m\overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{v} = m - e \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_e r^2\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

On projette alors le théorème du moment cinétique sur $\overrightarrow{e_z}$:

$$m_e r^2\ddot{\theta} = er\dot{r}B_0$$

$$\ddot{\theta} = \omega_c \frac{\dot{r}}{r}$$

Par intégration : $\dot{\theta}(t) - \dot{\theta}(t=0) = \omega_c ln(\frac{r}{a})$

$$\boxed{\dot{\theta}(t) = \omega_c ln(\frac{r}{a})}$$

Q 15. On a $\omega_c = 2\pi f_0$, donc

$$\frac{eB_0}{m_e} = 2\pi f_0$$

$$B_0 = \frac{2\pi m_e f_0}{e} = \frac{2\times 3\times 9{,}1\times 10^{-31}\times 2{,}45\times 10^9}{1{,}6\times 10^{-19}}$$

$$B_0 \simeq \frac{6\times 10^{-30}\times 2{,}45\times 10^9}{1{,}6\times 10^{-19}}$$

$$B_0 \simeq \frac{16\times 10^{-21}}{1{,}6\times 10^{-19}}$$

$$\boxed{B_0 \simeq 0{,}1 \text{ T}}$$

Q 16. La force électrique est conservative car elle dérive de l'énergie potentielle $E_p = -eV$.
On calcule alors le travail élémentaire de la force magnétique :

$$\delta W(\overrightarrow{F_B}) = -e[\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_0}] \cdot \overrightarrow{dl}$$

Or $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_0}$ est orthogonal à $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{dl}$ car $\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt}$, donc $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_0}$ est orthogonal à $\overrightarrow{dl}$

On en conclut que $\delta W(\overrightarrow{F_B}) = 0$

Ainsi, le sytème n'est soumis qu'à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas, donc le mouvement est conservatif. L'énergie mécanique étant conservé, on peut écrire que :

$$E_m(r) = E_m(r=a)$$

$$\frac{1}{2}m_e v^2 - eV(r) = \frac{1}{2}m_e v(r=a)^2 - eV(r=a)$$

Or, la vitesse en $r = a$ est négligeable et le potentiel $V(r=a) = 0$, donc :

cpge-paradise.com

$$\frac{1}{2}m_e v^2 - eV(r) = 0$$

$$v^2 = \frac{2eV(r)}{m_e}$$

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \frac{2eU_0 ln(r/a)}{m_e ln(b/a)}$$

$$\dot{r}^2 + r^2\omega_c^2 ln(r/a)^2 = \frac{2eU_0 ln(r/a)}{m_e ln(b/a)}$$

$$\boxed{\dot{r}^2 = \frac{2eU_0 ln(r/a)}{m_e ln(b/a)} - r^2\omega_c^2 ln(r/a)^2}$$

Q 17. Il faut que les électrons atteignent l'anode en $r = b$, ainsi il faut que $\dot{r}^2 > 0$ en $r = b$:

$$\frac{2eU_0 ln(b/a)}{m_e ln(b/a)} - b^2\omega_c^2 ln(b/a)^2 > 0$$

$$\frac{2eU_0}{m_e} > b^2\omega_c^2 ln(b/a)^2$$

$$U_0 > \frac{m_e b^2 e^2 B_0^2 ln(b/a)^2}{2em_e^2}$$

$$\boxed{U_0 > \frac{eb^2 B_0^2 ln(b/a)^2}{2m_e}}$$

Q 18. Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, en posant $\dot{\theta} = \omega$, on a :

$$\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ r\omega \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit l'expression de la force magnétique :

$$\overrightarrow{F_B} = -e \begin{pmatrix} 0 \\ r\omega \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -er\omega B_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A l'aide du PFD appliqué à un électron dans le réferentiel terrestre supposé galiléen, on retrouve la force électrique :

$$\overrightarrow{F_E} = m_e \overrightarrow{a} - \overrightarrow{F_B} = (-m_e r\omega^2 + er\omega B_0)\overrightarrow{e_r}$$

Or $\overrightarrow{F_E} = -e\overrightarrow{E}$, donc

$$\overrightarrow{E} = (\frac{m_e r\omega^2}{e} - r\omega B_0)\overrightarrow{e_r}$$

$$\overrightarrow{E} = (\frac{m_e r\omega^2}{e} - r\omega\frac{m_e\omega_c}{e})\overrightarrow{e_r}$$

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \frac{m_e r\omega}{e}(\omega - \omega_c)\overrightarrow{e_r}}$$

E est bien fonction linéaire de r.

Q 19. On sait que $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}V = -\frac{dV}{dr}\overrightarrow{e_r}$, donc :

$$\frac{dV}{dr} = \frac{m_e r\omega}{e}(\omega_c - \omega)$$

$$V(r) = \frac{m_e r^2\omega}{2e}(\omega_c - \omega) + A$$

Or $V(r = a) = 0 \Rightarrow A = -\frac{m_e a^2\omega}{2e}(\omega_c - \omega)$, donc :

$$V(r) = \frac{m_e(r^2-a^2)\omega}{2e}(\omega_c - \omega)$$

Or $U_0 = V(r = b)$, donc

$$\boxed{U_0 = \frac{m_e(b^2-a^2)\omega}{2e}(\omega_c - \omega)}$$

Q 20. D'après l'équation de Maxwell-Gauss $div(\overrightarrow{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{-ne}{\epsilon_0}$
Or $div(\overrightarrow{E}) = \frac{1}{r}\frac{d(rE)}{dr} = \frac{2m_e\omega}{e}(\omega - \omega_c)$, donc

$$\frac{-ne}{\epsilon_0} = \frac{2m_e\omega}{e}(\omega - \omega_c)$$

$$n = \frac{2m_e\omega\epsilon_0}{e^2}(\omega_c - \omega)$$

Or, d'après la question précédente : $m_e\omega(\omega_c - \omega) = \frac{2eU_0}{b^2-a^2}$, soit

$$\boxed{n = \frac{4U_0\epsilon_0}{e(b^2-a^2)}}$$

cpge-paradise.com

Partie III : Lévitation magnétique

Q 22. M et H étant de même dimension, alors χ est sans dimension. La relation entre $\overrightarrow{B} et \overrightarrow{H}$ est :

$$\overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{H}}{\mu_0} - \overrightarrow{M} = \frac{\overrightarrow{H}}{\mu_0} - \chi\overrightarrow{H}$$

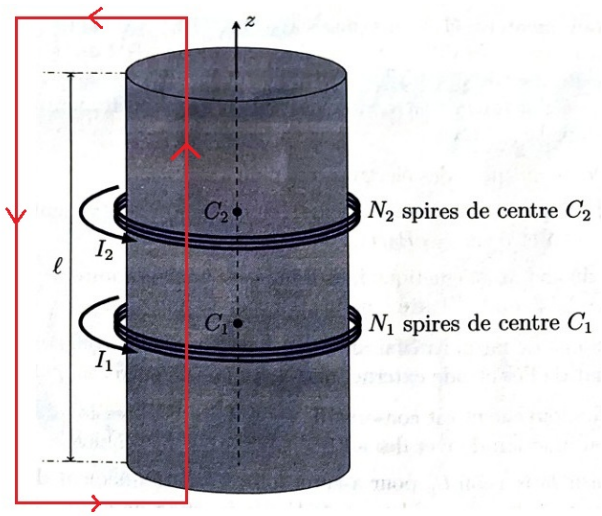
$$\boxed{\overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0(1+\chi)}}$$

On définit alorsμ_r par la relation $\overrightarrow{B} = \mu_0\mu_r\overrightarrow{H}$, donc $\boxed{\mu_r = 1 + \chi}$

Q 23. D'après l'équation de Maxwell-Thomson : $div(\overrightarrow{B}) = 0$, avec le formulaire de début d'énoncé, comme $\overrightarrow{B}$ est selon $\overrightarrow{e_z}$, alors :

$\frac{dB_0}{dz} = 0$, donc B_0 ne dépend pas de z et est donc uniforme.

Or $\overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0(1+\chi)}$ donc $\overrightarrow{H}$ est uniforme aussi.
De plus $\overrightarrow{M} = \chi\overrightarrow{H}$ donc $\overrightarrow{M}$ est aussi uniforme.
On applique alors le theorème d'Ampère généralisé sur un contour orienté rectangulaire dessiné en rouge ci-dessous :



$$\int \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dl} = I_{enlace}$$

$$Hl = N_1I_1 + N_2I_2$$

$$\boxed{B_0 = \mu_0\mu_r H = \frac{\mu_0\mu_r(N_1I_1+N_2I_2)}{l}}$$

Q 24. On note le flux propre $\phi_{1\to1}$ du champ 1 sur le circuit 1 et $B_1 = \frac{\mu_0\mu_r N_1 I_1}{l}$ le champ crée par le circuit 1.

$$\phi_{1\to1} = B_1 N_1 \pi R^2 = \frac{\mu_0\mu_r N_1^2 I_1 \pi R^2}{l}$$

Par définition de l'inductance propre : $\phi_{1\to1} = L_1 I_1$ donc

cpge-paradise.com

$$\boxed{L_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1^2 \pi R^2}{l}}$$

De même, on note le flux propre $\phi_{2\to 2}$ du champ 2 sur le circuit 2 et $B_2 = \frac{\mu_0 \mu_r N_2 I_2}{l}$ le champ crée par le circuit 2.

$$\phi_{2\to 2} = B_2 N_2 \pi R^2 = \frac{\mu_0 \mu_r N_2^2 I_2 \pi R^2}{l}$$

Par définition de l'inductance propre : $\phi_{2\to 2} = L_2 I_2$ donc

$$\boxed{L_2 = \frac{\mu_0 \mu_r N_2^2 \pi R^2}{l}}$$

Enfin, On note le flux $\phi_{1\to 2}$ du champ 1 sur le circuit 2 et $B_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 I_1}{l}$ le champ crée par le circuit 1.

$$\phi_{1\to 1} = B_1 N_2 \pi R^2 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 I_1 \pi R^2}{l}$$

Par définition de l'inductance mutuelle : $\phi_{1\to 2} = M_0 I_1$ donc

$$\boxed{M_0 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 \pi R^2}{l}}$$

Q 25. On note ϕ le flux magnétique à travers la spire 2, donc $\phi = L_2 I_2 + M(z) I_1$.
D'après la loi de Faraday $e = -\frac{d\phi}{dt}$

$$e = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M(z) \frac{dI_1}{dt}$$

Or, la spire 2 a une conductance G, donc $e = \frac{I_2}{G}$, donc :

$$\frac{I_2}{G} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M(z) \frac{dI_1}{dt}$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{I_2}{G} = M(z) \omega I sin(\omega t)$$

On cherche alorsI_2 sous la forme $I[\beta(z) sin(\omega t) - \alpha(z) cos(\omega t)]$. On réintègre cette forme dans l'équation précédente :

$$L_2 I[\beta \omega cos(\omega t) + \alpha \omega sin(\omega t)] + \frac{I}{G}[\beta sin(\omega t - \alpha cos(\omega t)] = M(z) \omega I sin(\omega t)$$

$$[L_2 \beta \omega - \frac{\alpha}{G}] cos(\omega t) + [L_2 \alpha \omega + \frac{\beta}{G}] sin(\omega t) = M(z) \omega sin(\omega t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2 \beta \omega - \frac{\alpha}{G} = 0 \\ L_2 \alpha \omega + \frac{\beta}{G} = M\omega \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = L_2 G \beta \omega \\ L_2^2 \omega^2 G \beta + \frac{\beta}{G} = M\omega \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = L_2 G \beta \omega \\ \beta \frac{1+(L_2 \omega G)^2}{G} = M\omega \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(z) = \frac{L_2 M(z) \omega^2 G^2}{1+(L_2 \omega G)^2} \\ \beta(z) = \frac{M(z) \omega G}{1+(L_2 \omega G)^2} \end{array} \right.$$

Q 26. On note $\overrightarrow{B_{1\to 2}} = B_r \overrightarrow{e_r} + B_z \overrightarrow{e_z}$ On calcule le flux de ce champ sur la spire 2, en supposant que B_z est uniforme sur la spire 2 :

cpge-paradise.com

$$\phi_{1\to 2} = B_z N_2 \pi R^2 = M(z) I_1(t)$$

$$B_z = \frac{M_0 f(z) I_1(t)}{N_2 \pi R^2}$$

Or $M_0 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 \pi R^2}{l}$ d'après la question 24, donc

$$B_z = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 I_1(t) f(z)}{l}$$

De plus, d'après l'équation de Maxwell-Thomson : $div\overrightarrow{B} = 0$, donc avec le formulaire de début d'énoncé :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} = -\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} = -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 I_1(t)}{l}\frac{df}{dz}$$

$$\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} = -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 I_1(t) r}{l}\frac{df}{dz}$$

$$rB_r = -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 I_1(t) r^2}{2l}\frac{df}{dz} + A$$

$$B_r = -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 I_1(t) r}{2l}\frac{df}{dz} + \frac{A}{r}$$

Pour éviter toute divergence de B_r en $r = 0$, on prend $A = 0$. De plsu, si on se place sur la spire, $r = R$. Ainsi, la composante B_r s'écrit bien

$$\boxed{B_r = -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 I_1(t) R}{2l}\frac{df}{dz}}$$

Q 27. On calcule la force de Laplace élémentaire exercé sur la spire 2 par ce champ magnétique :

$$\overrightarrow{dF_L} = I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B_{1\to 2}} = -I_2 R B_r d\theta \overrightarrow{e_z}$$

Par intégration le long de la spire 2, on obtient alors :

$$\overrightarrow{F_L} = -2\pi R R B_r I_2 \overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{F_L} = \frac{\pi R^2 \mu_0 \mu_r N_1 I^2}{l}\frac{df}{dz}[\beta cos(\omega t) sin(\omega t) - \alpha cos^2(\omega t)]\overrightarrow{e_z}$$

Or $<sin(\omega t)cos(\omega t)> = 0$ et $<cos^2(\omega t)>=\frac{1}{2}$, donc

$$\boxed{<\overrightarrow{F_L}>= -\frac{\pi R^2 \mu_0 \mu_r N_1 I^2 \alpha}{2l}\frac{df}{dz}\overrightarrow{e_z}}$$

Comme f est monotone décroissante, alors $\frac{df}{dz} < 0$, $<\overrightarrow{F_L}>$ est dirigé selon $+\overrightarrow{e_z}$, elle permet donc de soulever la spire 2, et la faire léviter si elle permet de compenser le poids de la spire.

FIN DU CORRIGE