cpge-paradise.com

Mines-Ponts MP : Physique 2 2023
Proposition de corrigé

clementpicard69000@gmail.com

Partie I : Ressorts et loi de Hooke

Q 1. Montrons que le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi.

$$W_{AB}(\overrightarrow{T}) = -\int_A^B k(l-l_0)dl = [-\tfrac{1}{2}k(l-l_0)^2]_A^B = \tfrac{1}{2}k(l_A-l_0)^2 - \tfrac{1}{2}k(l_B-l_0)^2$$

Le travail ne dépend que des points de départ et d'arrivée, donc la force est conservative. De plus, $dE_p = -\delta W$ donc, en prenant l'origine de E_p en $l = l_0$, on a :

$$E_p = \tfrac{1}{2}k(l-l_0)^2 = \tfrac{1}{2}\frac{k^2(l_B-l_0)^2}{k}$$

$$\boxed{E_p = \tfrac{1}{2}\sigma T^2}$$

Q 2. Au point M, selon $\overrightarrow{e_x}$, il s'applique les forces :
- $\overrightarrow{f_M} = -\lambda_1 \dot{x_1}\overrightarrow{e_x}$
- $\overrightarrow{T} = -k(l-l_0)\overrightarrow{e_x} = -k(x_1-x_2-l_0)\overrightarrow{e_x}$

Au point P, selon $\overrightarrow{e_x}$, il s'applique les forces :
- $\overrightarrow{f_M} = -\lambda_2 \dot{x_2}\overrightarrow{e_x}$
- $\overrightarrow{T} = k(l-l_0)\overrightarrow{e_x} = k(x_1-x_2-l_0)\overrightarrow{e_x}$

En appliquant le PFD aux points M et P dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} m_1\ddot{x_1} = -\lambda_1\dot{x_1} - k(x_1-x_2-l_0) \\ m_2\ddot{x_2} = -\lambda_2\dot{x_2} + k(x_1-x_2-l_0) \end{cases}}$$

Q 3. On cherche des solutions sous la forme

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{01} + a_1 e^{\mu t} \\ x_2(t) = x_{02} + a_2 e^{\mu t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x_1}(t) = a_1\mu e^{\mu t} \\ \dot{x_2}(t) = a_2\mu e^{\mu t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x_1}(t) = a_1\mu^2 e^{\mu t} \\ \ddot{x_2}(t) = a_2\mu^2 e^{\mu t} \end{cases}$$

On réintègre ces expressions dans les équations de la question précédente, pour obtenir :

$$\begin{cases} m_1 a_1\mu^2 e^{\mu t} = -\lambda_1 a_1\mu e^{\mu t} - k(x_{01} + a_1 e^{\mu t} - x_{02} - a_2 e^{\mu t} - l_0) \\ m_2 a_2\mu^2 e^{\mu t} = -\lambda_2 a_2\mu e^{\mu t} + k(x_{01} + a_1 e^{\mu t} - x_{02} - a_2 e^{\mu t} - l_0) \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} ([m_1\mu^2 + \lambda_1\mu + k]a_1 - ka_2)e^{\mu t} = -k(x_{01} - x_{02} - l_0) \\ (-ka_1 + [m_1\mu^2 + \lambda_1\mu + k]a_2)e^{\mu t} = k(x_{01} - x_{02} - l_0) \end{cases}$$

Or ces équations sont valables quelque soit t, donc le membre de droite est nulle :

$$\boxed{x_{01} - x_{02} = l_0}$$

La relation est cohérente : cela signifie qu'au repos, la longueur du ressort est égal à la longueur à vide.

Q 4. Le système précédent se réécrit alors :

$$\begin{cases} ([m_1\mu^2 + \lambda_1\mu + k]a_1 - ka_2)e^{\mu t} = 0 \\ (-ka_1 + [m_1\mu^2 + \lambda_1\mu + k]a_2)e^{\mu t} = 0 \end{cases}$$

Pour que ce système ait une solution non nulle, il faut que son déterminant soit nul. Cela donne directement :

$$\boxed{(m_1\mu^2 + \lambda_1\mu + k)(m_2\mu^2 + \lambda_2\mu + k) - k^2 = 0}$$

Q 5. Avec les hypothèses de la question, l'équation précédente devient :

$$(m\mu^2 + k)(m\mu^2 + k) = k^2$$

$$m^2\mu^4 + 2mk\mu^2 + k^2 = k^2$$

$$(m^2\mu^2 + 2mk)\mu^2 = 0$$

La solution $\mu = 0$ n'est pas intéressante car on aurait $x_i = x_{0i}$, c'est l'équilibre, il reste donc :

$$m^2\mu^2 + 2mk = 0$$

$$\mu^2 = -\frac{2k}{m}$$

$$\boxed{\mu = \pm i\sqrt{\frac{2k}{m}}}$$

On reprend le système de la question 4, simplifié par les hypothèses de la question 5 :

$$\begin{cases} (m\mu^2 + k)a_1 = ka_2 \\ (m\mu^2 + k)a_2 = ka_1 \end{cases}$$

En remplaçant $\mu^2 = -\frac{2k}{m}$, on obtient directement

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = -1}$$

Les deux masses vibrent en opposition de phase.

Q 6.

- $\overrightarrow{T_1} = -k_1(l_1 - l_{01})\overrightarrow{e_x} = -k_1(x_A - x_P - l_{01})\overrightarrow{e_x}$
- $\overrightarrow{T_2} = k_2(l_2 - l_{02})\overrightarrow{e_x} = k_2(x_M - x_A - l_{02})\overrightarrow{e_x}$

En appliquant le PFD au point A de masse nulle, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on btient :

$$-k_1(x_A - x_P - l_{01}) + k_2(x_M - x_A - l_{02}) = 0$$

$$(k_1 + k_2)x_A = k_1(x_P + l_{01}) + k_2(x_M - l_{02})$$

$$\boxed{x_A = \frac{k_1(x_P + l_{01}) + k_2(x_M - l_{02})}{k_1 + k_2}}$$

On exprime alors la force appliqué au point M :

$$\overrightarrow{F} = -k_2(x_M - x_A - l_{02})\overrightarrow{e_x}$$

$$\overrightarrow{F} = -k_2(x_M - \frac{k_1(x_P+l_{01})+k_2(x_M-l_{02})}{k_1+k_2} - l_{02})\overrightarrow{e_x}$$

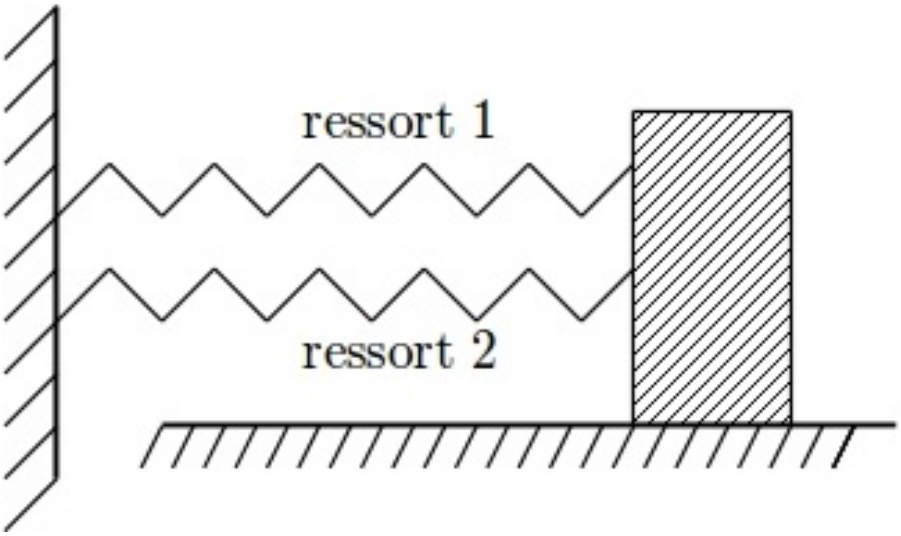
$$\overrightarrow{F} = -k_2\frac{k_1x_M+k_2x_M-k_1(x_P+l_{01})-k_2(x_M-l_{02})-k_1l_{02}-k_2l_{02}}{k_1+k_2}\overrightarrow{e_x}$$

$$\overrightarrow{F} = -k_2\frac{k_1x_M-k_1(x_P+l_{01})-k_1l_{02}}{k_1+k_2}\overrightarrow{e_x}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}[x_M - x_P - (l_{01}+l_{02})]}$$

Comme $x_M - x_P$ est la longeur totale des deux ressorts, l'association de ces deux ressorts en série est équivalent à un ressort de longueur à vide $\boxed{l_0 = l_{01} + l_{02}}$ et de raideur $k = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$ donc de souplesse $\boxed{\sigma = \frac{1}{k} = \frac{k_1+k_2}{k_1k_2}}$

Q 7.



Dans ce cas là, la raideur équivalente est $\boxed{k = k_1 + k_2}$

Q 8. En notant R la résistance électrique, et γ la conductivité électrique, on a : $R = \frac{L}{\gamma s} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = R\frac{s}{L}$
Ainsi, on identifie l'analogie suivante : $\boxed{k \leftrightarrow \frac{1}{\gamma}}$ et $\boxed{E \leftrightarrow R}$
$[E] = [k]L^{-1}$ or k est en N.m^{-1} et $[N] = MLT^{-2}$ (car $F = ma$...) on en déduit que :

$$\boxed{[E] = ML^{-1}T^{-2}}$$

Q 9. $\boxed{dM = \rho s dr}$
Avec la formule (1), on a directement que la raideur du système Σ s'écrit $dk = E\frac{s}{dr}$. Donc sa souplesse $d\sigma = \frac{1}{dk}$ s'écrit :

$$\boxed{d\sigma = \frac{dr}{Es}}$$

cpge-paradise.com

Q 10. Par analogie avec la formule $T(l) = k(l - l_0)$, on écrit : $\boxed{T(r) = \frac{1}{d\sigma}\frac{\partial \xi}{\partial r}dr = Es\frac{\partial \xi}{\partial r}}$

Q 11. Le réferentiel lié à la tige n'est pa galiléen car il est enrotation uniforme par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. Il faut donc ajouter une force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{F_{ie}}$. Les forces exercées sur Σ sont alors :

- $\overrightarrow{T(r+dr)} = Es\frac{\partial \xi}{\partial r}|_{r+dr}\overrightarrow{e_r}$
- $\overrightarrow{T(r)} = -Es\frac{\partial \xi}{\partial r}|_{r}\overrightarrow{e_r}$
- $\overrightarrow{F_{ie}} = dM\omega_0^2 r\overrightarrow{e_r} = \rho s\omega_0^2 r dr\overrightarrow{e_r}$

La condition d'équilibre s'écrit alors sur $\overrightarrow{e_r}$:

$$Es\frac{\partial \xi}{\partial r}|_{r+dr} - Es\frac{\partial \xi}{\partial r}|_{r} + \rho s\omega_0^2 r dr = 0$$

$$Es\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2}dr = -\rho s\omega_0^2 r dr$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} = -\frac{\rho s\omega_0^2}{Es}r}$$

On a alors $\chi = \frac{\rho\omega_0^2}{E}$. Or $\rho = \frac{M}{Ls}$, d'où :

$$\boxed{\chi = \frac{M\omega_0^2}{ELs}}$$

Q 12. En $r = 0$, la tige est fixe donc $\xi(r = 0) = 0$

En $r = L$, la tige est libre, la force $\overrightarrow{T(r)} = Es\frac{\partial \xi}{\partial r}|_{r=L}\overrightarrow{e_r}$ qui s'applique à sa droite est donc nulle, donc $\frac{\partial \xi}{\partial r}|_{r=L} = 0$

On résout alors l'équation $\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} = -\chi r = 0$, en primitivant deux fois :

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = -\frac{\chi r^2}{2} + A$$

$$\xi(r) = -\frac{\chi r^3}{6} + Ar + B$$

Comme $\xi(r = 0) = 0$ alors $B = 0$ et comme $\frac{\partial \xi}{\partial r}|_{r=L} = 0 \Rightarrow A = \frac{\chi L^2}{2}$, ainsi :

$$\boxed{\xi(r) = -\frac{\chi r^3}{6} + \frac{\chi L^2}{2}r}$$

Et $T(0) = Es\frac{\partial \xi}{\partial r}|_{r=0} = Es\frac{\chi L^2}{2}$. Or $\chi = \frac{M\omega_0^2}{ELs}$, alors :

$$\boxed{T(0) = \frac{M\omega_0^2 L}{2}}$$

On retrouve la force d'inertie d'entraînement appliquée au centre de masse de la tige.

cpge-paradise.com

Partie II : Module d'élasticité des solides déformables

Q 13. On a $[E] = ML^{-1}T^{-2}$. De plus, h est en J.s, avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, on sait que $[J] = ML^2T^{-2}$, donc $[h] = ML^2T^{-1}$, ainsi :

$$ML^{-1}T^{-2} = M^{\alpha}M^{\beta}L^{2\beta}T^{-\beta}L^{\gamma}$$

$$ML^{-1}T^{-2} = M^{\alpha+\beta}L^{2\beta+\gamma}T^{-\beta}$$

On en déduit le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ 2\beta+\gamma-1 \\ -\beta = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \gamma = -5 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Q 14. $a \simeq 100$ pm $= 10^{-10}$ m, donc, avec $m_e \simeq 10^{-30}$ kg :

$$E \simeq m_e^{-1}h^2a^5$$

$$E \simeq 10^30 \times 6,6^2 \times 10{-}68 \times 10^{50} \simeq 4 \times 10^{13} \text{ Pa}$$

Q 15. La fonction d'onde s'interprète comme une densité de probabilité. Par normalisation, on sait que $\iiint |\psi|^2 d\tau = 1$. Ainsi, $[\psi] = L^{-3/2}$

Q 16. Cette forme de solution est une solution en onde stationnaire. On la réintègre dans l'équation de Schrodinger :

$$-\frac{\overline{h}^2}{2m}W(t)\Delta\Phi + UW(t)\Phi = j\overline{h}\Phi W'(t)$$

$$-\frac{\overline{h}^2}{2m}\frac{\Delta\Phi}{\Phi} + U = j\overline{h}\frac{W'(t)}{W(t)}$$

Comme le membre de gauche dépend de l'espace, et celui de droite du temps, alors ces deux membres sont égales à une constante E ; qui représente l'énergie, donc

$$j\overline{h}W'(t) = EW(t)$$

$$\boxed{W(t) = Aexp(-j\frac{E}{\overline{h}}t)} \text{ avec } A \text{ une constante.}$$

Q 17. L'équation de Schrodingerindépendante du temps s'écrit alors

$$-\frac{\overline{h}^2}{2m}\Delta\Phi + U_0\Phi = E\Phi$$

$$\Delta\Phi = \frac{2m(U_0-E)}{\overline{h}^2}\Phi$$

$$F_1''(x)F_2F_3 + F_1F_2''(y)F_3 + F_1F_2F_3''(z) = \frac{2m(U_0-E)}{\overline{h}^2}F_1F_2F_3$$

$$\frac{F_1''}{F_1} + \frac{F_2''}{F_2} + \frac{F_3''}{F_3} = \frac{2m(U_0-E)}{\overline{h}^2}$$

cpge-paradise.com

Chaque terme $\frac{F_i''}{F_i}$ dépend d'une variable différente. La somme étant égale à une constante, alors chaque terme est égal à une constante C_i.

De plus $E > U_0$, donc $\frac{2m(U_0-E)}{\overline{h}^2} < 0$, il faut donc que chaque $C_i < 0$

On résout alors $\frac{F_i''}{F_i} = C_i \Rightarrow F_i'' - C_i F_i = 0$

Comme $C_i < 0$, alors les slutions sont de la forme :

$$F_i(x_i) = A_i cos(\sqrt{-C_i}x_i) + B_i sin(\sqrt{-C_i}x_i)$$

Or les barrières de potentiel en $x_i = 0$ et $x_i = a_i$ étant infinies, par continuité de Φ, il faut que $F_i(x_i = 0) = 0$ soit $A_i = 0$ et $F_i(x_i = a_i) = 0$. La deuxième condition implique :

$$B_i sin(\sqrt{-C_i}a_i) = 0$$

$$sin(\sqrt{-C_i}a_i) = 0$$

$$\sqrt{-C_i}a_i = n_i\pi \text{ avec } n_i \text{ entier relatif}$$

$$C_i = -\frac{n_i^2\pi^2}{a_i^2} \text{ avec } n_i \text{ entier relatif}$$

On en déduit alors que :

$$\boxed{F_i(x_i) = B_i sin(\frac{n_i\pi x_i}{a_i})}$$

Q 18. En réinjectant dans l'équation : $\frac{F_1''}{F_1} + \frac{F_2''}{F_2} + \frac{F_3''}{F_3} = \frac{2m(U_0-E)}{\overline{h}^2}$, on obtient :

$$C_1 + C_2 + C_3 = \frac{2m(U_0-E)}{\overline{h}^2}$$

$$-\frac{n_1^2\pi^2}{a_1^2} - \frac{n_2^2\pi^2}{a_2^2} - \frac{n_3^2\pi^2}{a_3^2} = \frac{2m(U_0-E)}{\overline{h}^2}$$

Or, l'état fondamental se trouve pour $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, donc :

$$\pi^2[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2}] = \frac{2m(E-U_0)}{\overline{h}^2}$$

$$E = U_0 + \frac{\overline{h}^2\pi^2}{2m}[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2}] \text{ Or } \overline{h} = \frac{h}{2\pi}$$

$$\boxed{E_f = U_0 + \frac{h^2}{8m}[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2}]}$$

Q 19. Avant transformation $a_1 = a_2 = a_3 = a$: $E_f = U_0 + \frac{3h^2}{8ma^2}$

Après transformation : $E_f' = U_0 + \frac{h^2}{8m}[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2}]$, avec $a_1 = a - \delta a$

Pour trouver $a_2 = a_3$, on utiilise la conservation du volume :

$$a_1 a_2 a_3 = a^3$$

$$a_2^2 = \frac{a^3}{a-\delta a}$$

Ainsi :

cpge-paradise.com

$$E'_f = U_0 + \frac{h^2}{8m}[(a-\delta a)^{-2} + \frac{2(a-\delta a)}{a^3}]$$

On a donc $\Delta E_1 = E'_f - E_f$, donc ;

$$\Delta E_1 = \frac{h^2}{8m}[(a-\delta a)^{-2} + \frac{2(a-\delta a)}{a^3} - \frac{3}{a^2}]$$

Q 20.

$$\Delta E_1 = \frac{h^2}{8m}[(a-\delta a)^{-2} - \frac{2\delta a}{a^3} - \frac{1}{a^2}]$$

$$\Delta E_1 = \frac{h^2}{8m}[a^{-2}(1-\frac{\delta a}{a})^{-2} - \frac{2\delta a}{a^3} - \frac{1}{a^2}]$$

$$\Delta E_1 = \frac{h^2}{8m}[a^{-2}(1+2\frac{\delta a}{a}+3\frac{\delta a^2}{a^2}) - \frac{2\delta a}{a^3} - \frac{1}{a^2}]$$

$$\Delta E_1 = \frac{3h^2}{8m}\frac{\delta a^2}{a^4}$$

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2}\frac{3h^2}{4ma^4}\delta a^2$$

$$\boxed{\Delta E_1 = \frac{1}{2}K\delta a^2 \text{ avec } K = \frac{3h^2}{4ma^4}}$$

Q 21. Par conservation du volume : $Na^3 = Ls$, donc : $\boxed{N = \frac{Ls}{a^3}}$

Q 22. On a $N = \frac{Ls}{a^3}$. Si on fait varier la longueur sur une seule dimension, le nombre de cubes restant inchangé : $N = \frac{(L-\delta L)s}{a^2(a-\delta a)}$

$$\frac{L-\delta L}{a-\delta a} = \frac{L}{a}$$

$$\frac{L(1-\delta L/L)}{a(1-\delta a/a)} = \frac{L}{a}$$

$$\frac{1-\delta L/L)}{1-\delta a/a} = 1$$

$$\delta L/L = \delta a/a$$

$$\boxed{\delta a = \frac{a\delta L}{L}}$$

Q 23.

$$\Delta E_t = \frac{N}{2}K\delta a^2$$

$$\Delta E_t = \frac{Ls}{2a^3}K(\frac{a\delta L}{L})^2$$

$$\Delta E_t = \frac{sK}{2aL}\delta L^2$$

$$F = \frac{sK}{aL}\delta L$$

On identifie alors $k = \frac{sK}{aL}$. Or $E = \frac{kL}{s} = \frac{K}{a}$ donc :

$$\boxed{E = \frac{3h^2}{4ma^5}}$$

On retrouve bien les mêmes puissances qu'à la question 13 et un coefficient $C = \frac{3}{4}$ proche de l'unité.

cpge-paradise.com

Partie III : L'expérience de Kappler

Q 25. Le point d'attache O est en $z = 0$. Comme z est orienté vers le haut, la longueur du ressort est $l = -z$. Donc, l'énergie potentielle s'écrit :

$$E_p = mgz + \frac{1}{2}k(-z - l_0)^2 + C$$

$$E_p = mgz + \frac{1}{2}k(z + l_0)^2 + C$$

Pour déterminer la position d'équilibre, on cherche z_0 tel que $\frac{dE_p}{dz}|_{z_0} = 0$

$$mg + k(z_0 + l_0) = 0$$

$$z_0 = -l_0 - \frac{mg}{k}$$

Or $z = z' + z_0 = z' - l_0 - \frac{mg}{k}$. On injecte dans l'expression de E_p :

$$E_p = mgz' - mgl_0 - \frac{m^2g^2}{k} + \frac{1}{2}k(z' + \frac{mg}{k})^2 + C$$

$$E_p = mgz' - mgl_0 - \frac{m^2g^2}{k} + \frac{1}{2}kz'^2 + mgz' + \frac{m^2g^2}{2k} + C$$

$$E_p = -mgl_0 - \frac{m^2g^2}{2k} + \frac{1}{2}kz'^2 + C$$

On fixe comme origine de l'énergie potentielle $E_p(z' = 0) = 0$, et on on obtient alors directement :

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kz'^2 = \frac{z'^2}{2\sigma}}$$

Q 26. D'après la loi de Boltzmann : $P(z') = \frac{1}{\xi(\theta)}exp(-\frac{E_p(z')}{k_B\theta}) = \frac{1}{\xi(\theta)}exp(-\frac{z'^2}{2\sigma k_B\theta})$
On identifie alors directement

$$\boxed{\gamma(\theta) = \frac{1}{2\sigma k_B\theta}}$$

Ensuite, on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} P(z')dz' = 1$.
Or $P(z')$ est paire donc $\int_{-\infty}^{+\infty} P(z')dz' = 2\int_0^{+\infty} P(z')dz'$

$$\frac{2}{\xi(\theta)}\int_0^{+\infty} exp(-\gamma z'^2)dz' = 1$$

$$\xi(\theta) = 2\int_0^{+\infty} exp(-\gamma z'^2)dz' = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}$$

$$\boxed{\xi(\theta) = \sqrt{2\pi\sigma k_B\theta}}$$

Q 27. La plaque se déplace aléatoirement autour de la position d'equilibre z_0. Or, z' est l'écart à l'équilibre donc $\boxed{< z' >= 0}$

Q 28. Par définition $< z'^2 >= \int_{-\infty}^{+\infty} z'^2P(z')dz' = 2\int_0^{+\infty} z'^2P(z')dz'$:

cpge-paradise.com

$$< z'^2 >= \frac{2}{\xi(\theta)} \int_0^{+\infty} z'^2 exp(-\gamma z'^2) dz'$$

$$< z'^2 >= \frac{1}{2\xi(\theta)} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma^3}}$$

$$< z'^2 >= \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma k_B \theta}} \sqrt{8\pi\sigma^3 k_B^3 \theta^3}$$

$$\boxed{< z'^2 >= \sigma k_B \theta}$$

On retrouve alors que $< E'_p >= \frac{<z'^2>}{2\sigma} = \frac{k_B\theta}{2}$. On retrouve le théorème d'équipartition de l'énergie à 1 dimension.

Q 29. Comme mouvement brownien, on peut penser à l'expérience de Robert Brown (qui est à l'origine du mouvement brownien) décrivant le mouvement de grains de pollen en suspension dans l'eau.

Pour la loi de Boltzmann, on peut penser au modèle de l'atmosphère isotherme.

FIN DU CORRIGE