Math A 2023 - XLSR

Disclaimer

Notations

On note $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les corps des nombres réels et complexes. Pour $z \in \mathbb{C}$ on note $\bar{z}$ le conjugué complexe de z et $|z|$ le module de z.Si V est un espace euclidien, on note $\operatorname{End}(V)$ l'espace des applications $\mathbb{R}$ linéaires de V dans lui-même. On note aussi $\mathrm{GL}(V)$ le groupe des applications $\mathbb{R}$-linéaires bijectives de V sur lui-même, et on note $\mathrm{O}(V) \subset \mathrm{GL}(V)$ (respectivement $\mathrm{SO}(V) \subset \mathrm{GL}(V)$) le groupe orthogonal (respectivement spécial orthogonal) de V.
Par convention, les $\mathbb{R}$-algèbres considérées dans ce problème seront non nulles, associatives et unitaires, mais pas forcément commutatives. Deux $\mathbb{R}$-algèbres A et B sont dites isomorphes s'il existe une bijection $\mathbb{R}$-linéaire $f: A \rightarrow B$ telle que $f(xy)=f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in A$.
Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre et soit $e \in A$ l'élément unité de A pour la multiplication. On notera $\mathbb{R}_A$ la sous-algèbre $\{ae \mid a \in \mathbb{R}\}$ de A. Un élément x de A est dit inversible s'il existe $y \in A$ tel que $xy=yx=e$. On note $A^{\times}$l'ensemble des éléments inversibles de A. On admet que $A^{\times}$est un groupe pour la multiplication.
On note $M_2(\mathbb{C})$ la $\mathbb{C}$-algèbre des matrices de taille 2×2 à coefficients complexes. Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on note

$$Z\left(z_1, z_2\right)=\left(\begin{array}{cc}
z_1 & -\overline{z_2} \\
z_2 & \overline{z_1}
\end{array}\right)$$

Soit $\mathbb{H}=\left\{Z\left(z_1, z_2\right) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\right\} \subset M_2(\mathbb{C})$. On admet que $\mathbb{H}$ est un sous- $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{C})$, admettant comme base les matrices

$$E:=\left(\begin{array}{ll}
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right), I:=\left(\begin{array}{cc}
i & 0 \\
0 & -i
\end{array}\right), J:=\left(\begin{array}{cc}
0 & 1 \\
-1 & 0
\end{array}\right), K:=\left(\begin{array}{ll}
0 & i \\
i & 0
\end{array}\right)$$

qui vérifient les relations suivantes dans $M_2(\mathbb{C})$:

$$I^2=J^2=K^2=-E, IJ=-JI=K, JK=-KJ=I, KI=-IK=J .$$

On veillera à ne pas confondre l'élément i de $\mathbb{C}$ et la matrice I de $\mathbb{H} \subset M_2(\mathbb{C})$, ni la matrice I avec la matrice identité E.
On note $\mathbb{H}^{\text{im}}=\left\{xI+yJ+zK \mid(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\} \subset \mathbb{H}$.
On définit une application $N: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ par $N\left(Z\left(z_1, z_2\right)\right):=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2$.
On note $S=\{U \in \mathbb{H} \mid N(U)=1\}$

I Préliminaires

Si $A=\left(a_{ij}\right) \in M_2(\mathbb{C})$ on note $A^*=\left(\overline{a_{ji}}\right)$.

1. a) Montrer que $\mathbb{H}$ est une sous- $\mathbb{R}$-algèbre de $M_2(\mathbb{C})$ stable par $Z \mapsto Z^*$.

b) Soit $Z \in \mathbb{H}$. Calculer ZZ^* et en déduire que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible.
c) Soit $Z \in \mathbb{H}$. Montrer que $Z \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}}$ si et seulement si $ZZ^{\prime}=Z^{\prime} Z$ pour tout $Z^{\prime} \in \mathbb{H}$.

2. a) Montrer que l'on a $N\left(ZZ^{\prime}\right)=N(Z) N\left(Z^{\prime}\right)$ pour tous $Z, Z^{\prime} \in \mathbb{H}$.

b) Montrer que S est un sous-groupe de $\mathbb{H}^{\times}$et que $\frac{1}{\sqrt{N(Z)}} Z \in S$ pour tout $Z \in \mathbb{H}^{\times}$.

3. a) Montrer que pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ on a

$$N(xE + yI + zJ + tK) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

b) Montrer que pour- tout $U \in \mathbb{H}^{\text{im}}$ on a $U^2 = -N(U)E$ et que

$$\mathbb{H}^{\text{im}} = \left\{U \in \mathbb{H} \mid U^2 \in \left] -\infty, 0\right] E\right\}$$

La question 3a) montre que l'on définit un produit scalaire $\langle,\rangle sur \mathbb{H}$ en posant, pour $Z, Z' \in \mathbb{H}$

$$\langle Z, Z' \rangle = \frac{N\left(Z + Z'\right) - N(Z) - N\left(Z'\right)}{2}$$

et que l'on dispose d'une isométrie

$$\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{H}, \psi(x, y, z, t) := xE + yI + zJ + tK$$

de $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel sur $\mathbb{H}$. On munit par la suite $\mathbb{H}$ de sa structure d'espace euclidien induite par le produit scalaire $\langle,\rangle . Ainsi$ (E, I, J, K) est une base orthonormée de $\mathbb{H}$.

4. Montrer que S est une partie fermée et connexe par arcs de $\mathbb{H}$.
5. Soient $U, V \in \mathbb{H}^{\text{im}}$.

a) Montrer que U et V sont orthogonaux si et seulement si $UV + VU = 0$. Dans ce cas montrer que $UV \in \mathbb{H}^{\text{im}}$ et que le déterminant de la famille (U, V, UV) dans la base (I, J, K) de $\mathbb{H}^{\text{im}}$ est positif ou nul.
b) Montrer que si (U, V) est une famille orthonormale dans $\mathbb{H}^{\text{im}}$, alors (U, V, UV) est une base orthonormée directe de $\mathbb{H}^{\text{im}}$.

II Automorphismes de $\mathbb{H}$ et rotations

On munit $S \times S$ de la loi de composition $\times$ donnée par $(u_1, u_2) \times (v_1, v_2) = (u_1 v_1, u_2 v_2)$ et on admet qu'elle munit $S \times S$ d'une structure de groupe. On considère l'application

$$\begin{aligned} \alpha : S \times S &\longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{H}) \\ (u, v) &\longmapsto \left(Z \mapsto uZv^{-1}\right) \end{aligned}$$

en admettant que $\alpha(u, v)$ est bien dans $GL(\mathbb{H})$. Pour $u \in S$, on admet que l'endomorphisme $\alpha(u, u)$ de $\mathbb{H}$ laisse stable le sous-espace $\mathbb{H}^{\text{im}}$ de $\mathbb{H}$, et on note $C_u \in \operatorname{End}\left(\mathbb{H}^{\text{im}}\right)$ l'endomorphisme induit. On a donc $C_u(Z) = uZu^{-1}$ pour $Z \in \mathbb{H}^{\text{im}}$

6. Montrer que α est un morphisme de groupes et décrire son noyau.
7. Montrer que α est continu et que l'image de α est contenue dans $SO(\mathbb{H})$. On pourra commencer par montrer que $\alpha(u, v) \in \mathrm{O}(\mathbb{H})$ pour $(u, v) \in S \times S$.
8. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{H}^{\text{im}} \cap S$, et soit $u = (\cos\theta)E + (\sin\theta)v$.

a) Montrer que $u \in S$ et que $u^{-1} = (\cos\theta)E - (\sin\theta)v$.
b) Soit $w \in \mathbb{H}^{\text{im}} \cap S$ un vecteur orthogonal à v. Décrire la matrice de C_u dans la base orthonormée directe (v, w, vw) de $\mathbb{H}^{\text{im}}$.

9. Montrer que l'application $u \mapsto C_u$ induit un morphisme surjectif de groupes $S \to \mathrm{SO}\left(\mathbb{H}^{\text{im}}\right)$ et décrire son noyau.
10. a) En déduire que $\alpha(S \times S) = \mathrm{SO}(\mathbb{H})$.

b) Montrer que $N:=\alpha(S\times\{$ B $)$ est un sous-groupe de $\mathrm{SO}(\mathbb{H})$, puis que $gng^{-1}\in N$ pour tous $n\in N$ et $g\in\mathrm{SO}(\mathbb{H})$ et que $\{\pm\mathrm{id}\}\subsetneq N\subsetneq\mathrm{SO}(\mathbb{H})$.
Soit Aut($\mathbb{H}$) l'ensemble des automorphismes de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{H}$. Un élément de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est donc une application $\mathbb{R}$-linéaire bijective $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ satisfaisant $f|_{\mathbb{R}_{\boldsymbol{H}}}=\mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\boldsymbol{H}}}$ et $f(uv)=f(u)f(v)$ pour tout $(u,v)\in\mathbb{H}^2$.

11. Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est un sous-groupe de GL($\mathbb{H}$), contenant $\alpha(u,u)$ pour tout $u\in S$.
12. Montrer que $(f(I),f(J),f(K))$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ pour tout $f\in\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$. 13. a) Montrer que l'application de restriction à $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ induit un isomorphisme de groupes

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H})\simeq\mathrm{SO}\left(\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\right)$$

b) Montrer que

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H})=\{\alpha(u,u)\mid u\in S\}$$

III Normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^2$

Le but de cette partie est la preuve du résultat suivant, qui sera utilisé dans la partie IV.
Théorème A. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.Si

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\geq 4$$

pour tous $x,y\in\mathbb{R}^2$ vérifiant $\|x\|=\|y\|=1$, alors $\|\cdot\|$ provient d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$ et on note

$$\mathcal{C}:=\left\{x\in\mathbb{R}^2\mid\|x\|_2=1\right\}$$

On fixe une norme quelconque $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$ et on note

$$\mathcal{K}=\left\{A\in M_2(\mathbb{R})\mid\forall x\in\mathbb{R}^2\|x\|_2\geq\|Ax\|\right\}$$

14. a) Montrer que $\mathcal{K}$ est une partie compacte et convexe de $M_2(\mathbb{R})$.

b) Montrer qu'il existe $A\in\mathcal{K}$ tel que $\det A=\sup_{B\in\mathcal{K}}\det B$.
On fixe par la suite un élément A de K tel que $\det A=\sup_{B\in\mathcal{K}}\det B$.

15. Montrer que $\det A>0$ et qu'il existe $x\in\mathcal{C}$ tel que $\|Ax\|=1$.

On fixe par la suite $x\in\mathcal{C}$ tel que $\|Ax\|=1$.

16. Soit $B\in\mathrm{SO}\left(\mathbb{R}^2\right)$ une matrice telle que $x=B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

a) Montrer que pour tout $r\in]0,1[$ il existe $x_r\in\mathcal{C}$ tel que

$$\left\|AB\begin{pmatrix}r&0\\0&\frac{1}{r}\end{pmatrix}x_r\right\|>1.$$

b) Montrer que si $x_r=\begin{pmatrix}y_r\\z_r\end{pmatrix}$, alors $z_r^2>\frac{r^2}{1+r^2}$.

17. En utilisant ce qui précède, montrer qu'il existe une base (e_1,e_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $\|Ax\|=\|x\|_2$ pour $x\in\{e_1,e_2\}$.
18. Soit T une partie fermée de $\mathcal{C}$, telle qu'il existe $x,y\in T$ avec $y\notin\{-x,x\}$. On suppose que pour tous $a,b\in T$ avec $b\notin\{-a,a\}$, on a que $\frac{b-a}{\|b-a\|_2}$ et $\frac{b+a}{\|b+a\|_2}$ appartiennent à T. Montrer que $T=\mathcal{C}$.
19. Montrer le théorème A.

IV Algèbres valuées

Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre et e son élément neutre. Dans cette partie, on identifiera $\mathbb{R}_A$ avec $\mathbb{R}$, et on notera (abusivement) a l'élément ae de A pour $a \in \mathbb{R}$. On dit que A est algébrique si pour tout $x \in A$ il existe un entier $n \geq 1$ et $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$$

On dit que A est sans diviseur de zéro si $xy \neq 0$ pour tous $x, y \in A \backslash \{0\}$. Dans cette partie, nous allons montrer le théorème B ci-dessous, puis l'utiliser pour prouver le théorème C plus loin.
Théorème B. Une $\mathbb{R}$-algèbre algébrique et sans diviseur de zéro est isomorphe à $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.
Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre algébrique et sans diviseur de zéro.

20. a) Montrer que $x^2 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x$ pour tout $x \in A$.

b) Montrer que si $x \in A \backslash \mathbb{R}$, alors $\mathbb{R} + \mathbb{R}x$ est une $\mathbb{R}$-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}$.
On suppose que A n'est pas isomorphe à une des algèbres $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

21. Montrer qu'il existe $i_A \in A$ tel que $i_A^2 = -1$.

On fixe par la suite un élément i_A de A tel que $i_A^2 = -1$. On note $U = \mathbb{R} + \mathbb{R}i_A$ et on définit l'application

$$T : A \to A, T(x) = i_A x i_A.$$

On note id : $A \to A$ l'application identité de A. 22. a) Montrer que $T(xy) = -T(x)T(y)$ pour tous $x, y \in A$.
b) Calculer $T^2 = T \circ T$ et en déduire que $A = \ker(T - \mathrm{id}) \oplus \ker(T + \mathrm{id})$.

23. Montrer que $\ker(T + \mathrm{id}) = U$ et en déduire que $\ker(T - \mathrm{id}) \neq \{0\}$.
24. On fixe $\beta \in \ker(T - \mathrm{id}) \backslash \{0\}$.

a) Montrer que l'application $x \mapsto \beta x$ envoie $\ker(T - \mathrm{id})$ dans $\ker(T + \mathrm{id})$. En déduire que $\beta^2 \in U$ et que $\ker(T - \mathrm{id}) = \beta U$.
b) Montrer que $\beta^2 \in]-\infty, 0[$.
c) Démontrer le théorème B.
On se propose maintenant de démontrer le résultat suivant :
Théorème C. Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre. S'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel A telle que

$$\forall x, y \in A \|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$$

alors A est isomorphe à $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.
On fixe une $\mathbb{R}$-algèbre comme dans l'énoncé du théorème ci-dessus.

25. Soient $x, y \in A$ tels que $xy = yx$ et tels que $V = \mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ soit de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall u, v \in V \quad \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 \geq 4\|u\| \cdot \|v\|$$

et que la restriction de $\|\cdot\|$ à V provient d'un produit scalaire sur V.

26. Montrer que $x^2 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x$ pour tout $x \in A$. On pourra utiliser le résultat de la question 25 avec $y = 1$.
27. Conclure.