ECOLE POLYTECHNIQUE
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2023

LUNDI 17 AVRIL 2023
08h00 - 12h00

FILIERE MP-MPI - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES A (XLSR)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Mathématiques A

Filières MP et MPI

lundi 17 avril 2023 de 08h00 à 12h00

« Dans la question 10 b), dans la définition de l'ensemble N, il faut remplacer, entre les parenthèses, 1 par E, et donc lire :

$N := \alpha\,(S \times \{E\})$ »

Notations On note $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les corps des nombres réels et complexes. Pour $z \in \mathbb{C}$ on note $\overline{z}$ le conjugué complexe de z et $|z|$ le module de z.

Si V est un espace euclidien, on note $\mathrm{End}(V)$ l'espace des applications $\mathbb{R}$-linéaires de V dans lui-même. On note aussi $\mathrm{GL}(V)$ le groupe des applications $\mathbb{R}$-linéaires bijectives de V sur lui-même, et on note $\mathrm{O}(V) \subset \mathrm{GL}(V)$ (respectivement $\mathrm{SO}(V) \subset \mathrm{GL}(V)$) le groupe orthogonal (respectivement spécial orthogonal) de V.

Par convention, les $\mathbb{R}$-algèbres considérées dans ce problème seront non nulles, associatives et unitaires, mais pas forcément commutatives. Deux $\mathbb{R}$-algèbres A et B sont dites isomorphes s'il existe une bijection $\mathbb{R}$-linéaire $f : A \to B$ telle que $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in A$.

Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre et soit $e \in A$ l'élément unité de A pour la multiplication. On notera $\mathbb{R}_A$ la sous-algèbre $\{ae|\, a \in \mathbb{R}\}$ de A. Un élément x de A est dit inversible s'il existe $y \in A$ tel que $xy = yx = e$. On note $A^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de A. On admet que $A^\times$ est un groupe pour la multiplication.

On note $M_2(\mathbb{C})$ la $\mathbb{C}$-algèbre des matrices de taille 2×2 à coefficients complexes. Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on note

$$Z(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathbb{H} = \{Z(z_1, z_2)|\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}\} \subset M_2(\mathbb{C})$. On admet que $\mathbb{H}$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{C})$, admettant comme base les matrices

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

qui vérifient les relations suivantes dans $M_2(\mathbb{C})$:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E,\ IJ = -JI = K,\ JK = -KJ = I,\ KI = -IK = J.$$

On veillera à ne pas confondre l'élément i de $\mathbb{C}$ et la matrice I de $\mathbb{H} \subset M_2(\mathbb{C})$, ni la matrice I avec la matrice identité E.

On note $\mathbb{H}^{\mathrm{im}} = \{xI + yJ + zK \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{H}$.
On définit une application $N : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ par $N(Z(z_1, z_2)) := |z_1|^2 + |z_2|^2$.
On note $S = \{U \in \mathbb{H} \mid N(U) = 1\}$.

I Préliminaires

Si $A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{C})$ on note $A^* = (\overline{a_{ji}})$.

1. a) Montrer que $\mathbb{H}$ est une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $M_2(\mathbb{C})$ stable par $Z \mapsto Z^*$.

   b) Soit $Z \in \mathbb{H}$. Calculer ZZ^* et en déduire que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible.

   c) Soit $Z \in \mathbb{H}$. Montrer que $Z \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}}$ si et seulement si $ZZ' = Z'Z$ pour tout $Z' \in \mathbb{H}$.

2. a) Montrer que l'on a $N(ZZ') = N(Z)N(Z')$ pour tous $Z, Z' \in \mathbb{H}$.

   b) Montrer que S est un sous-groupe de $\mathbb{H}^\times$ et que $\frac{1}{\sqrt{N(Z)}}Z \in S$ pour tout $Z \in \mathbb{H}^\times$.

3. a) Montrer que pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ on a
$$N(xE + yI + zJ + tK) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

   b) Montrer que pour tout $U \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ on a $U^2 = -N(U)E$ et que
$$\mathbb{H}^{\mathrm{im}} = \left\{U \in \mathbb{H} \,\middle|\, U^2 \in \left]-\infty, 0\right] E\right\}.$$

   La question 3a) montre que l'on définit un produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$ sur $\mathbb{H}$ en posant, pour $Z, Z' \in \mathbb{H}$
$$\langle Z, Z' \rangle = \frac{N(Z + Z') - N(Z) - N(Z')}{2},$$
   et que l'on dispose d'une isométrie
$$\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{H},\ \psi(x, y, z, t) := xE + yI + zJ + tK$$
   de $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel sur $\mathbb{H}$. On munit par la suite $\mathbb{H}$ de sa structure d'espace euclidien induite par le produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$. Ainsi (E, I, J, K) est une base orthonormée de $\mathbb{H}$.

4. Montrer que S est une partie fermée et connexe par arcs de $\mathbb{H}$.

5. Soient $U, V \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.

   a) Montrer que U et V sont orthogonaux si et seulement si $UV + VU = 0$. Dans ce cas montrer que $UV \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ et que le déterminant de la famille (U, V, UV) dans la base (I, J, K) de $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ est positif ou nul.

   b) Montrer que si (U, V) est une famille orthonormale dans $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$, alors (U, V, UV) est une base orthonormée directe de $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.

II Automorphismes de $\mathbb{H}$ et rotations

On munit $S \times S$ de la loi de composition $\times$ donnée par $(u_1, u_2) \times (v_1, v_2) = (u_1 v_1, u_2 v_2)$ et on admet qu'elle munit $S \times S$ d'une structure de groupe. On considère l'application

$$\begin{aligned} \alpha : S \times S &\longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{H}) \\ (u, v) &\longmapsto \left(Z \mapsto uZv^{-1}\right) \end{aligned}$$

en admettant que $\alpha(u,v)$ est bien dans $GL(\mathbb{H})$. Pour $u \in S$, on admet que l'endomorphisme $\alpha(u,u)$ de $\mathbb{H}$ laisse stable le sous-espace $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ de $\mathbb{H}$, et on note $C_u \in \mathrm{End}(\mathbb{H}^{\mathrm{im}})$ l'endomorphisme induit. On a donc $C_u(Z) = uZu^{-1}$ pour $Z \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.

6. Montrer que α est un morphisme de groupes et décrire son noyau.

7. Montrer que α est continu et que l'image de α est contenue dans $\mathrm{SO}(\mathbb{H})$. On pourra commencer par montrer que $\alpha(u,v) \in \mathrm{O}(\mathbb{H})$ pour $(u,v) \in S \times S$.

8. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}} \cap S$, et soit $u = (\cos\theta)E + (\sin\theta)v$.

   a) Montrer que $u \in S$ et que $u^{-1} = (\cos\theta)E - (\sin\theta)v$.

   b) Soit $w \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}} \cap S$ un vecteur orthogonal à v. Décrire la matrice de C_u dans la base orthonormée directe (v, w, vw) de $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.

9. Montrer que l'application $u \mapsto C_u$ induit un morphisme surjectif de groupes $S \to \mathrm{SO}(\mathbb{H}^{\mathrm{im}})$ et décrire son noyau.

10. a) En déduire que $\alpha(S \times S) = \mathrm{SO}(\mathbb{H})$.

    b) Montrer que $N := \alpha(S \times \{E\})$ est un sous-groupe de $\mathrm{SO}(\mathbb{H})$, puis que $gng^{-1} \in N$ pour tous $n \in N$ et $g \in \mathrm{SO}(\mathbb{H})$ et que $\{\pm \mathrm{id}\} \subsetneq N \subsetneq \mathrm{SO}(\mathbb{H})$.

Soit $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ l'ensemble des automorphismes de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{H}$. Un élément de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est donc une application $\mathbb{R}$-linéaire bijective $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ satisfaisant $f|_{\mathbb{R}_{\mathbb{H}}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\mathbb{H}}}$ et $f(uv) = f(u)f(v)$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{H}^2$.

11. Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathbb{H})$, contenant $\alpha(u,u)$ pour tout $u \in S$.

12. Montrer que $(f(I), f(J), f(K))$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ pour tout $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.

13. a) Montrer que l'application de restriction à $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ induit un isomorphisme de groupes
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \simeq \mathrm{SO}(\mathbb{H}^{\mathrm{im}}).$$

b) Montrer que
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \{\alpha(u,u) |\ u \in S\}.$$

III Normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^2$

Le but de cette partie est la preuve du résultat suivant, qui sera utilisé dans la partie IV.

Théorème A. Soit $||\cdot||$ une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Si
$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 \geq 4$$
pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $||x|| = ||y|| = 1$, alors $||\cdot||$ provient d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

On note $||\cdot||_2$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$ et on note
$$\mathcal{C} := \{x \in \mathbb{R}^2 |\ ||x||_2 = 1\}.$$

On fixe une norme *quelconque* $||\cdot||$ sur $\mathbb{R}^2$ et on note
$$\mathcal{K} = \{A \in M_2(\mathbb{R}) |\ \forall x \in \mathbb{R}^2\ ||x||_2 \geq ||Ax||\ \}.$$

14. a) Montrer que $\mathcal{K}$ est une partie compacte et convexe de $M_2(\mathbb{R})$.

b) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{K}$ tel que $\det A = \sup_{B \in \mathcal{K}} \det B$.

On fixe par la suite un élément A de K tel que $\det A = \sup_{B\in\mathcal{K}} \det B$.

15. Montrer que $\det A > 0$ et qu'il existe $x \in \mathcal{C}$ tel que $||Ax|| = 1$.

On fixe par la suite $x \in \mathcal{C}$ tel que $||Ax|| = 1$.

16. Soit $B \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$ une matrice telle que $x = B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

a) Montrer que pour tout $r \in]0,1[$ il existe $x_r \in \mathcal{C}$ tel que
$$||AB\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix} x_r|| > 1.$$

b) Montrer que si $x_r = \begin{pmatrix} y_r \\ z_r \end{pmatrix}$, alors $z_r^2 > \frac{r^2}{1+r^2}$.

17. En utilisant ce qui précède, montrer qu'il existe une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $||Ax|| = ||x||_2$ pour $x \in \{e_1, e_2\}$.

18. Soit T une partie fermée de $\mathcal{C}$, telle qu'il existe $x, y \in T$ avec $y \notin \{-x, x\}$. On suppose que pour tous $a, b \in T$ avec $b \notin \{-a, a\}$, on a que $\frac{b-a}{||b-a||_2}$ et $\frac{b+a}{||b+a||_2}$ appartiennent à T. Montrer que $T = \mathcal{C}$.

19. Montrer le théorème A.

IV Algèbres valuées

Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre et e son élément neutre. Dans cette partie, on identifiera $\mathbb{R}_A$ avec $\mathbb{R}$, et on notera (abusivement) a l'élément ae de A pour $a \in \mathbb{R}$. On dit que A est *algébrique* si pour tout $x \in A$ il existe un entier $n \geq 1$ et $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$$

On dit que A est *sans diviseur de zéro* si $xy \neq 0$ pour tous $x, y \in A \setminus \{0\}$. Dans cette partie, nous allons montrer le théorème B ci-dessous, puis l'utiliser pour prouver le théorème C plus loin.

Théorème B. Une $\mathbb{R}$-algèbre algébrique et sans diviseur de zéro est isomorphe à $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre algébrique et sans diviseur de zéro.

20. a) Montrer que $x^2 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x$ pour tout $x \in A$.

b) Montrer que si $x \in A \setminus \mathbb{R}$, alors $\mathbb{R} + \mathbb{R}x$ est une $\mathbb{R}$-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}$.

On suppose que A n'est pas isomorphe à une des algèbres $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

21. Montrer qu'il existe $i_A \in A$ tel que $i_A^2 = -1$.

On fixe par la suite un élément i_A de A tel que $i_A^2 = -1$. On note $U = \mathbb{R} + \mathbb{R}i_A$ et on définit l'application

$$T : A \to A, \ T(x) = i_A x i_A.$$

On note id : $A \to A$ l'application identité de A.

22. a) Montrer que $T(xy) = -T(x)T(y)$ pour tous $x, y \in A$.

b) Calculer $T^2 = T \circ T$ et en déduire que $A = \ker(T - \mathrm{id}) \oplus \ker(T + \mathrm{id})$.

23. Montrer que $\ker(T + \mathrm{id}) = U$ et en déduire que $\ker(T - \mathrm{id}) \neq \{0\}$.

24. On fixe $\beta \in \ker(T - \mathrm{id}) \setminus \{0\}$.

a) Montrer que l'application $x \mapsto \beta x$ envoie $\ker(T - \mathrm{id})$ dans $\ker(T + \mathrm{id})$. En déduire que $\beta^2 \in U$ et que $\ker(T - \mathrm{id}) = \beta U$.

b) Montrer que $\beta^2 \in]-\infty, 0[$.

c) Démontrer le théorème B.

On se propose maintenant de démontrer le résultat suivant:

Théorème C. Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre. S'il existe une norme $||\cdot||$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel A telle que

$$\forall x, y \in A \ ||xy|| = ||x|| \cdot ||y||,$$

alors A est isomorphe à $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

On fixe une $\mathbb{R}$-algèbre comme dans l'énoncé du théorème ci-dessus.

25. Soient $x, y \in A$ tels que $xy = yx$ et tels que $V = \mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ soit de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall u, v \in V \quad ||u + v||^2 + ||u - v||^2 \geq 4||u|| \cdot ||v||$$

et que la restriction de $||\cdot||$ à V provient d'un produit scalaire sur V.

26. Montrer que $x^2 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x$ pour tout $x \in A$. On pourra utiliser le résultat de la question 25 avec $y = 1$.

27. Conclure.