

**ECOLE NORMALE SUPERIEURE**

**CONCOURS D'ADMISSION 2023**

**JEUDI 20 AVRIL 2023**

**08h00 - 14h00**

**FILIERE PSI**

**PHYSIQUE (U)**

***Durée : 6 heures***

***L'utilisation des calculatrices n'est pas  
autorisée pour cette épreuve***

## COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 6 heures)

- Le sujet comporte 13 pages numérotées de 1 à 13. Le sujet comporte 71 questions numérotées de 1 à 71.
- Les réponses non justifiées seront comptées fausses, sauf mention explicite dans la question.
- L'usage de calculatrices n'est pas autorisé. Les applications numériques seront effectuées avec un chiffre significatif, sauf mention explicite dans la question.
- Un formulaire est présent en page 13.
- Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

## DÉBUT DE L'ÉPREUVE

\* \* \*

## Boîte à photons et boîte à électrons

## Partie 1: Boîte à électrons

Nous allons étudier ce qu'on appelle une boîte à électrons. En mécanique quantique, les objets quantiques présentent une dualité onde-corpuscule, ce qui veut dire qu'ils ne sont ni uniquement l'un ni uniquement l'autre. Cependant, en fonction des situations physiques et des grandeurs mesurées, on peut faire apparaître plus spécifiquement un caractère que l'autre. Nous allons dans cette partie brièvement étudier deux situations différentes de boîte à électrons qui font ressortir soit le caractère particulaire, via sa charge, soit le caractère ondulatoire de l'électron.

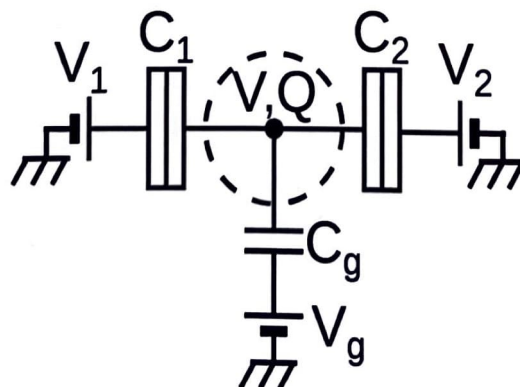


Figure 1.1: Schéma électrostatique d'un îlot électronique. Les doubles rectangles représentent des jonctions tunnel qui ont une partie capacitive.

## 1.1 Îlot capacitif

On considère dans un premier temps l'îlot capacitif de la figure 1.1 en ne prenant en compte que le caractère capacitif des jonctions tunnel. On note  $V$  le potentiel de l'îlot,  $Q = -|e|N$  la charge portée par l'îlot, avec  $N$  un entier,  $C_i$  les capacités entre l'îlot et les différents conducteurs et  $q_i$  les charges portées par les armatures des condensateurs côté sources de tension.

- [1] Calculer l'énergie électrostatique  $E_{el}(V, V_i, C_i)$  totale du circuit qui consiste en l'énergie électrostatique stockée dans les condensateurs moins le travail des sources de tension pour garder les tensions  $V_i$  ( $i = 1, 2, g$ ) constantes. On mettra le résultat sous la forme de deux termes, dont un fera apparaître le potentiel de l'îlot  $V$ . Ce terme permet de définir la capacité  $C$  de l'îlot dont on donnera l'expression.
- [2] Calculer la charge électrique  $Q = -N|e|$  de l'îlot avec  $N$  un entier et  $|e|$  la charge élémentaire et montrer que l'énergie électrostatique du système est

$$E_{el}(N) = U \left[ N - \frac{\sum_i C_i V_i}{|e|} \right]^2 - \frac{1}{2} \sum_i C_i V_i^2, \quad (1.1)$$

avec  $U$  l'énergie de charge dont on donnera l'expression.

- [3] On s'intéresse à l'influence des valeurs de tension sur le nombre de charges de l'îlot. Justifier alors qu'on peut ne garder que le premier terme de l'équation (1.1). Dans toute la suite, on ne considérera plus que ce terme pour l'énergie électrostatique de l'îlot.
- [4] On suppose  $V_1 = V_2 = 0$ . Expliquer graphiquement la valeur du nombre d'électrons  $N$  sur l'îlot en fonction de  $V_g$ .

On prend maintenant en compte les jonctions tunnel. Elles permettent des échanges de charge entre les sources  $V_i$  ( $i = 1, 2$ ) et l'îlot. On suppose que l'îlot contient initialement  $N$  électrons et que seuls des processus de transfert à 1 électron ont lieu.

- [5] Décrire les 4 processus de transfert possibles. Donner la variation d'énergie électrostatique dans les électrodes associée à chaque processus.
- [6] Afin de déterminer si un processus de transfert de charge est autorisé, on regarde comment l'énergie du système varie. Calculer la variation d'énergie électrostatique totale  $\Delta E_p$  du système pour chaque processus de transfert  $p$ .
- [7] **A partir de maintenant**, on suppose que le contact 2 n'est pas relié à une source de tension mais à la masse électrique. Que vaut  $V_2$ ? Exprimer dans ce cas les différentes conditions sur  $V_1$  et  $V_g$  pour que la charge de l'îlot soit constante et égale à  $N$  sous forme d'inégalités sur  $|e|V_1$  en fonction de  $|e|V_g$  et  $N$ .
- [8] On appelle diamants de Coulomb les régions de l'espace  $V_1, V_g$  où la charge sur l'îlot est constante. A quoi sont égales la demi hauteur (définie comme la distance entre l'axe des abscisses et le sommet d'un diamant de Coulomb à  $V_1 \neq 0$ ) et la largeur (le long de l'abscisse) d'un diamant de Coulomb? On notera  $C_g/C = \alpha_g$ .
- [9] Tracer les domaines où la charge de l'îlot est constante et égale à  $N - 1, N$  et  $N + 1$  dans le plan  $V_g$  (axe des abscisses)  $V_1$  (axe des ordonnées).
- [10] On a jusqu'ici négligé le spectre en énergie de l'îlot électronique. On suppose que le  $k$ -ième électron ne peut entrer sur l'îlot que si son énergie est  $\epsilon_k$  où l'on a  $\epsilon_{k+1} \geq \epsilon_k$  pour tout  $k$ . Quelle est maintenant l'énergie de l'état avec  $N$  électrons sur l'îlot? Que vaut  $\Delta E_p$ ?

- [11] Représenter quatre diamants de Coulomb successifs dans le cas où  $\epsilon_{2k+1} = \epsilon_{2k}$  et  $\epsilon_{2(k+1)} = \epsilon_{2k} + \delta\epsilon$  (cette situation caractérise de manière idéale le cas où chaque niveau d'énergie de l'îlot est doublement dégénéré). Faites apparaître la quantité  $\delta\epsilon$  sur votre dessin.

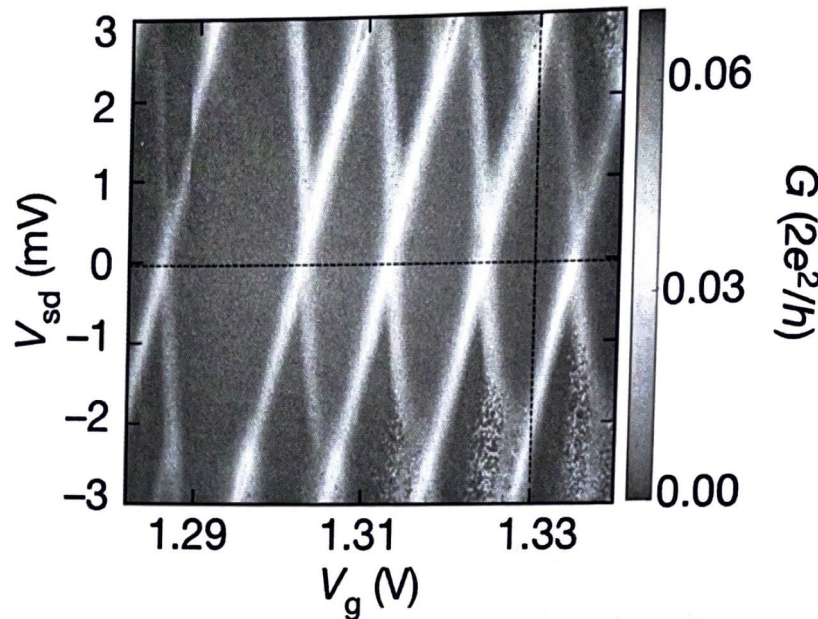


Figure 1.2: Conductance différentielle au travers d'un îlot électronique formé dans un nanotube de carbone dans le régime de blocage de Coulomb en fonction de la tension de grille  $V_g$  et de la tension source-drain  $V_{sd}$ . Les valeurs de conductance supérieures à  $0,04 \frac{2e^2}{h}$  sont dues au bruit de mesure.

- [12] Que vaut le courant électrique à l'intérieur d'un diamant de Coulomb?

Le plan peut être pavé par ces diamants de Coulomb tels que calculé. Pour chaque rangée de diamants de Coulomb, le courant calculé à la question précédente est incrémenté (ou décrémenté) d'une valeur constante avec l'augmentation (ou la diminution) de  $V_1$ .

- [13] Expérimentalement, il est pratique de mesurer la conductance différentielle  $G = \frac{dI}{dV_1}$  au travers de l'îlot électronique. La figure 1.2 présente la conductance différentielle au travers d'un îlot électronique formé dans un nanotube de carbone, dans le régime de blocage de Coulomb que nous venons d'étudier, en fonction de la tension de grille  $V_g$  et de la tension source-drain  $V_{sd} = V_1$ . Justifier le fait que  $G \neq 0$  seulement sur des lignes.

- [14] À partir de la figure 1.2, estimer les valeurs de  $U$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_g$  et  $\delta\epsilon$  dans cet îlot électronique. On donnera ici les résultats avec 2 chiffres significatifs. Quelle séquence de  $\epsilon_i$  observe-t-on?

On peut vérifier l'ordre de grandeur de la capacité  $C_g$ . Dans le dispositif mesuré, le nanotube de carbone a un rayon  $r \approx 1.5$  nm et une longueur  $L_{NT} \approx 1$   $\mu$ m. Il est posé sur l'électrode de grille de largeur  $l \approx 100$  nm et de longueur  $L$  de plusieurs microns. Celle-ci est recouverte d'une couche de diélectrique (oxyde d'aluminium) d'épaisseur  $h \approx 3$  nm et de permittivité relative  $\epsilon_r \approx 9$ .

- [15] Justifier qu'on peut donc modéliser le système par un cylindre infini et un plan conducteur infini séparés par le diélectrique.

- [16] En utilisant l'équation différentielle vérifiée par le potentiel électrostatique  $V$  et les conditions aux limites, justifier précisément que dans les deux situations suivantes :

- Deux cylindres conducteurs infinis de mêmes rayons  $r$  distants de  $2d$  ayant respectivement des densités volumiques de charge  $\rho$  et  $-\rho$ .
- Un cylindre conducteur infini de rayon  $r$  de densité volumique de charge  $\rho$  et un plan conducteur infini de potentiel nul confondu avec le plan bissecteur des deux cylindres de la situation précédente.

le potentiel  $V$  est le même dans le demi espace délimité par le plan conducteur et contenant le cylindre de densité volumique de charge  $\rho$ .

[17] L'expression de la capacité de deux fils conducteurs de rayon  $r$ , de longueur  $l$  et distants de  $d$  peut être calculée directement et vaut :

$$C_{2 \text{ fils}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r l}{\operatorname{arccosh}\left(\frac{d}{2r}\right)}. \quad (1.2)$$

En utilisant le résultat de la question précédente, donner l'expression de la capacité  $C_{\text{fil-plan}}$  entre un fil de rayon  $r$ , de longueur  $l$  et distant de  $h$  d'un plan conducteur en fonction de  $C_{2 \text{ fils}}$ . Donner ensuite une estimation de  $C_g$ . On donne  $\operatorname{arccosh}(2) \approx 1.3169578969248166$ .

## 1.2 Régime cohérent

Dans cette section, nous considérons que les électrons se comportent comme des ondes planes progressives. Les fonctions d'ondes complexes électroniques  $\psi(r, t)$  obéissent à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (1.3)$$

avec  $H$  le hamiltonien du système. On considère un **conducteur unidimensionnel** orienté selon l'axe  $(Ox)$  comme schématisé sur la figure 1.3 (a). Un diffuseur sur le conducteur est caractérisé par un **potentiel électrostatique  $V$  au point d'abscisse  $x = 0$** . Les ondes planes électroniques sont **partiellement réfléchies et transmises au niveau du diffuseur**. Un état stationnaire de ce problème de diffusion pour une énergie  $E(k)$ , avec  $k$  le vecteur d'onde et  $m_e$  la masse de l'électron, peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= A_1 e^{-ikx} + B_1 e^{ikx} & \text{pour } x < 0 \\ \psi_2(x) &= B_2 e^{-ikx} + A_2 e^{ikx} & \text{pour } x > 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

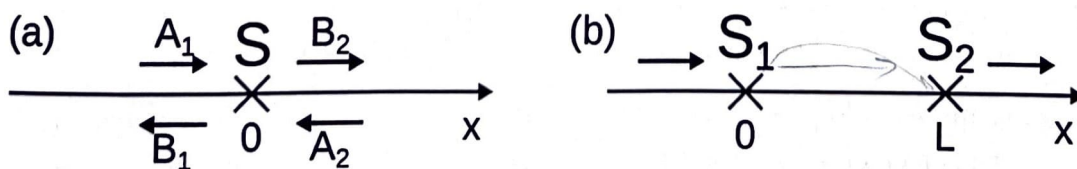


Figure 1.3: (a) Un diffuseur électronique  $S$  positionné en  $x = 0$ . (b) Deux diffuseurs électroniques  $S_1$  et  $S_2$  positionnés en  $x = 0$  et  $x = L$ .

On note  $\psi_e = (A_1, A_2)$  et  $\psi_s = (B_1, B_2)$  respectivement les vecteurs correspondants aux amplitudes complexes des ondes entrantes et sortantes du diffuseur. Ces vecteurs sont reliés par la matrice de diffusion  $\bar{S}$  :

$$\psi_s = \bar{S} \psi_e \quad (1.5)$$

On donne l'expression de la densité de courant  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  associée à une fonction d'onde électronique  $\psi(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\frac{|e|\hbar}{2m_e i} (\psi^*(\mathbf{r}, t)[\nabla\psi(\mathbf{r}, t)] - \psi(\mathbf{r}, t)[\nabla\psi^*(\mathbf{r}, t)]), \quad (1.6)$$

avec  $m_e$  la masse d'un électron et  $|e|$  la charge élémentaire. On donne l'expression de la densité de charge  $\rho(\mathbf{r}) = -e|\psi(\mathbf{r})|^2$ .

[18] Calculez la densité de courant associée aux ondes entrantes  $\psi_1$  et sortantes  $\psi_2$ .

[19] Écrire la loi de conservation locale de la charge. Dans le régime stationnaire, quelle est la relation entre  $J_1$  et  $J_2$ ?

**Dans toute la suite de cette partie, on se place dans le régime stationnaire.**

[20] Démontrer que la matrice de diffusion  $\bar{S}$  est unitaire, c'est à dire que  $\bar{S}^\dagger \bar{S} = \bar{S} \bar{S}^\dagger = \mathbb{1}$  avec  $\mathbb{1}$  la matrice identité et  $\bar{S}^\dagger = \bar{S}^*$ .

[21] En toute généralité, on peut écrire

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} r & \tau' \\ \tau & r' \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

avec  $r, r', \tau$  et  $\tau'$  des coefficients complexes de réflexion et de transmission en amplitude. Dédurre de l'unitarité de  $\bar{S}$  une relation sur  $r$  et  $r'$  et une relation sur  $\tau$  et  $\tau'$ . Définir et justifier les coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  à travers le diffuseur.

Une dernière propriété de la matrice de diffusion peut être trouvée en raisonnant sur l'invariance par renversement du temps. On va d'abord considérer le cas classique avant d'aborder superficiellement le cas quantique.

[22] On considère le mouvement d'une particule classique dans l'espace. Sa trajectoire  $\mathbf{r}(t)$  est une solution des équations du mouvement. On définit la trajectoire renversée dans le temps comme  $\mathbf{r}(-t)$ . On dit qu'un système est invariant par renversement du temps si les équations du mouvement sont inchangées pour  $\mathbf{r}(-t)$ . Qu'en est-il dans le cas d'une charge  $q$  repérée par sa position  $\mathbf{r}(t)$ , dans un champ électrique statique  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ? Quelle en est la raison?

[23] Qu'en est-il dans le cas de la présence d'un champ  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  statique? Raisonner ensuite dans le cas où l'on considère que le champ magnétique est généré par un solénoïde. Conclure.

[24] Quelle est la différence importante entre l'équation du mouvement classique et l'équation de Schrödinger (eq (1.3)) quand on étudie l'invariance par renversement du temps? On suppose que  $\psi(x, t)$  est solution de l'équation (1.3) avec  $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + qV(x)$  où  $V(x)$  est le potentiel électrostatique. Montrer que  $\psi^*(x, -t)$  est aussi solution, que l'on définira comme la solution renversée du temps,  $\psi_r(x, t)$ .

[25] On suppose le système invariant par renversement du temps. En considérant les solutions renversées du temps, trouver une autre propriété de la matrice de diffusion  $\bar{S}$ . Montrer que cela implique que  $\bar{S}$  est symétrique.

[26] En utilisant la notation polaire  $z = z_0 e^{i\theta}$  pour les coefficients de réflexion et transmission en amplitude, trouver la forme générale de la matrice  $\bar{S}$  en fonction de  $T$  et de deux angles. Il s'agit de la forme générale de la matrice de diffusion pour des fonctions d'onde électronique obéissant à l'équation de Schrödinger dans le cas où le système est invariant par renversement du temps.

On considère maintenant que l'on a deux diffuseurs positionnés en  $x = 0$  et  $x = L$  comme schématisé sur la figure 1.3 (b), chacun étant décrit par une matrice de diffusion particulière

$$\bar{S}_j = \begin{pmatrix} \sqrt{1-T_j} & i\sqrt{T_j} \\ i\sqrt{T_j} & \sqrt{1-T_j} \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

avec l'indice  $j = 1, 2$  pour les deux diffuseurs.

[27] On va premièrement déterminer l'expression de la phase  $\phi(x)$  de propagation de l'onde électronique entre les deux diffuseurs. Donner l'expression de  $\frac{d\phi(x)}{dx}$  en fonction du vecteur d'onde  $k$ . En déduire la valeur de la phase accumulée  $\Delta\phi$  au cours d'un aller entre les deux diffuseurs.

[28] En raisonnant sur l'ensemble des chemins parcourus par une onde électronique au travers de ce système, exprimer le coefficient de transmission en amplitude  $\tau_{\text{tot}}$  au travers l'ensemble du système sous forme d'une somme.

[29] Calculer cette somme, puis le coefficient de transmission  $T(k)$  correspondant. A quel dispositif optique cela vous fait-il penser? *Coree*

[30] Quelle est la condition de résonance?

[31] On suppose que l'énergie  $E(k)$  du mode électronique ne dépend que du vecteur d'onde  $k$ . Exprimer l'espacement en énergie  $\Delta E$  entre deux conditions de résonance en faisant apparaître la vitesse de groupe  $v_g$  du mode électronique qu'on supposera constante. On rappelle que  $E = \hbar\omega$  avec  $\omega$  la pulsation de l'onde électronique.

[32] On suppose maintenant que l'expression de l'énergie possède aussi un terme d'énergie potentielle électrostatique dû au potentiel  $V_G(x) = V_G$  généré par une électrode de grille locale. Comme à la section précédente, le potentiel vu par le conducteur est  $\alpha_G V_G$ . Exprimer la condition de résonance dans ce cas en faisant apparaître  $\Delta E$ .

[33] Tracer l'allure de la fonction  $T(E)$  en notant les points remarquables dans le cas  $T_1 = T_2 = T_0$  pour deux valeurs différentes de  $T_0$ . Commenter la valeur de  $T(E)$  à résonance.

[34] On peut montrer que la conductance  $G$  au travers d'un système caractérisé par un coefficient de transmission électronique  $T$  est  $G = \frac{2e^2}{h} T(E)$ . Calculer la conductance dans le cas classique de l'addition en série des deux résistances. Comparer avec le cas cohérent que vous avez obtenu à la question 29.

[35] Montrer que dans le cas incohérent on retrouve le cas classique lorsque  $T_1 \ll 1$  et  $T_2 \ll 1$ . Par analogie avec l'optique, quel changement faire sur le système pour le rendre incohérent?

Expérimentalement, l'énergie des électrons est contrôlée par le potentiel chimique  $\mu_i = eV_i$  des contacts dont l'interface avec le conducteur constitue les diffuseurs qui ont été étudiés ici. Dans le cas où  $eV_1 = -eV_2 = eV/2$  et où le conducteur est un nanotube de carbone, la conductance différentielle  $G = \frac{\partial I}{\partial V}$  au travers du système s'exprime comme

$$G = \frac{4e^2}{h} \frac{1}{2} \left[ T \left( \frac{eV}{2} + e\alpha_G V_G \right) + T \left( -\frac{eV}{2} + e\alpha_G V_G \right) \right]. \quad (1.9)$$

La figure 1.4 présente la conductance différentielle  $G$  au travers d'un nanotube de carbone présentant deux diffuseurs au niveau des contacts, dans le régime de transport cohérent, en fonction de  $V$  et  $V_G$ . Il s'agit d'une des façon les plus directes d'observer le caractère ondulatoire des électrons.

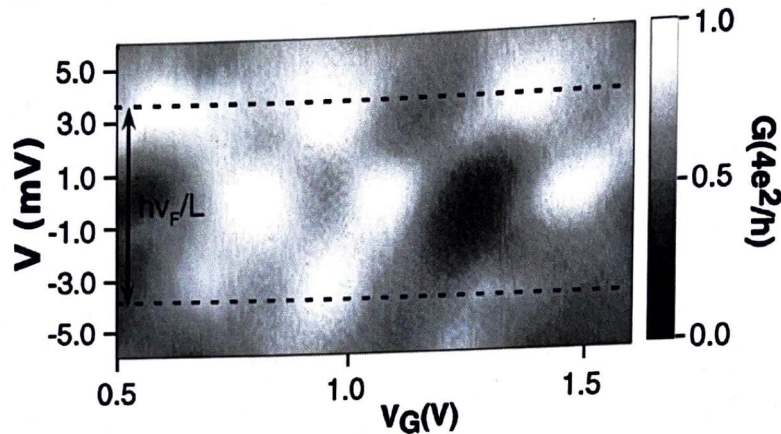


Figure 1.4: Conductance différentielle  $G$  au travers d'un nanotube de carbone présentant deux diffuseurs au niveau des contacts, dans le régime de transport cohérent, en fonction de  $V$  et  $V_G$  comme définis dans le texte.

[36] Décrire précisément la figure 1.4 en confrontant aux résultats des questions précédentes.

[37] Justifier l'indication  $\frac{h v_F}{L}$  sur la figure avec  $v_F$  la vitesse de groupe et estimer  $L$  sachant que  $v_F = 8 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans les nanotubes de carbone. Comparer  $\Delta E$  à l'énergie thermique et conclure.

## Partie 2: Boîte à photons

Dans cette section nous allons nous intéresser à l'étude d'un résonateur micro-onde qui peut être vu comme une boîte à photons micro-ondes. Nous allons voir comment le couplage d'un tel résonateur à une boîte à électrons permet des mesures d'électrométrie ultra sensibles.

### 2.1 Guide d'onde électromagnétique

Nous allons commencer par étudier la propagation des ondes électromagnétiques dans un guide d'onde de longueur finie. Par convention la partie temporelle est prise égale à  $e^{j\omega t}$ . Nous considérons dans un premier temps un guide d'onde de type coaxial avec un conducteur central, un conducteur extérieur de potentiel nul et un matériau isolant de constante diélectrique  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$  et perméabilité  $\mu$  constantes, entre les deux conducteurs. Nous sommes donc dans le cadre des milieux continus homogènes. On utilisera la représentation complexe des champs  $E$  et  $H$  dans toute cette partie sauf demande explicite (voir le formulaire pour les définitions).



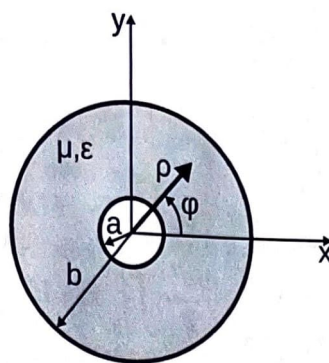


Figure 2.1: Géométrie d'une ligne coaxiale à section circulaire.

38] Montrer qu'en l'absence de charges libres et de courants libres, les vecteurs champs électriques  $\mathbf{E}$  et champs magnétiques  $\mathbf{H}$  obéissent à l'équation de d'Alembert.

On va étudier maintenant le cas de la ligne coaxiale de section circulaire de la figure 2.1. On ne considère que la propagation d'ondes dites transverses électromagnétiques (TEM) et on néglige la dissipation dans le conducteur. Celles-ci sont des ondes planes ayant les vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  perpendiculaires au vecteur d'onde  $\gamma = \gamma \mathbf{u}$ , avec  $\mathbf{u}$  le vecteur unitaire porté par l'axe de la ligne coaxiale.

39] Donner dans ce cas la forme générale des solutions et donner la relation de dispersion.

40] En utilisant les propriétés des ondes TEM et les invariances du problème, réécrire les équations rotationnelles de Maxwell en faisant apparaître la pulsation  $\omega$  et en développant les rotationnels à l'aide du formulaire.

41] Montrer que ces expressions imposent que  $E_\phi$  s'exprime en fonction de  $\rho$  et d'une fonction qui ne dépend que de  $z$ ,  $f(z)$  et de même que  $H_\rho$  s'exprime en fonction de  $\rho$  et d'une fonction qui ne dépend que de  $z$ ,  $g(z)$ .

42] Quelles sont les conditions aux limites pour  $E_\phi$  en  $\rho = a$  et  $\rho = b$ . En déduire  $E_\phi$  puis  $H_\rho$  et simplifier les équations obtenues à la question 40.

43] Montrer que ces dernières équations imposent que  $E_\rho$  s'exprime en fonction de  $\rho$  et d'une fonction qui ne dépend que de  $z$ ,  $h(z)$ . En déduire un système d'équations différentielles couplées sur les fonctions  $h(z)$  et  $g(z)$ .

44] Calculer le potentiel électrique  $V(z)$  du conducteur central ainsi que le courant  $I(z)$  dans le conducteur central en fonction de  $h(z)$  et  $g(z)$ . Utilisez ces résultats pour écrire un système d'équations différentielles couplées sur  $V(z)$  et  $I(z)$ .

45] En utilisant le système d'équations de la question 42 et les expressions de  $V(z)$  et  $I(z)$  de la question précédente, donner les expressions du champ électrique  $\mathbf{E}$  et du champ magnétique  $\mathbf{H}$  dans la ligne coaxiale. On ne considérera que la solution se propageant le long des  $z$  croissants et on notera  $V_0 = V(z=0)$  ainsi que  $I_0 = I(z=0)$ .

46] Dans le cas de champs sinusoïdaux stationnaires, les expressions moyennées temporellement des énergies électrique  $W_e$  et magnétique  $W_m$  stockées, ainsi que la puissance dissipée dans le diélectrique

$P_d$ , par unité de longueur sont:

$$W_e = \frac{\epsilon'}{4} \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dS \quad (2.1)$$

$$W_m = \frac{\mu}{4} \iint_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dS \quad (2.2)$$

$$P_d = \frac{\omega \epsilon''}{2} \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dS, \quad (2.3)$$

où  $S$  est la surface entre les deux conducteurs. Justifier ces expressions. On considère des dipôles électrocinétiques par unité de longueur de type capacité  $C_l$ , inductance  $L_l$  et conductance  $G_l = 1/R_l$ . Donner les expressions des moyennes temporelles des énergies stockées dans  $C_l$ ,  $L_l$  et de la puissance moyenne dissipée dans  $G_l$ . Exprimez  $C_l$ ,  $L_l$  et  $G_l$  en fonction de  $\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dS$  et  $\iint_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dS$ .

[47] Calculer  $C_l$ ,  $L_l$  et  $G_l$  en utilisant les expressions de  $E$  et  $H$  trouvées à la question 45. Montrer alors que le système d'équations différentielles obtenu à la question 44 se réécrit:

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -jL_l \omega I(z) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial I(z)}{\partial z} = -(G_l + j\omega C_l)V(z). \quad (2.5)$$

Quelle équation venez-vous de démontrer directement via les équations de Maxwell?

[48] On suppose maintenant qu'il y a de la dissipation dans la ligne de transmission, ce qui est pris en compte par une résistance par unité de longueur  $R_l$  qui modifie la première équation du système précédent:

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -(R_l + jL_l \omega)I(z) \quad (2.6)$$

Donner les solutions générales  $V(z)$  et  $I(z)$  en fonction de la constante de propagation complexe  $\gamma = \alpha + j\beta$  qu'on exprimera en fonction de  $R_l$ ,  $G_l$ ,  $L_l$  et  $C_l$ . On notera  $V_0^+$  les amplitudes des ondes de tension se propageant dans le sens des  $z$  croissants et  $V_0^-$  les amplitudes des ondes de tension se propageant dans le sens des  $z$  décroissants et similairement pour les ondes de courant avec  $I_0^+$  et  $I_0^-$ .

[49] On suppose que les pertes dans la ligne sont faibles, c'est à dire que  $R_l \ll \omega L_l$  et  $G_l \ll \omega C_l$ . Développer au premier ordre l'expression de la constante de propagation  $\gamma$ , exprimer  $\alpha$  et  $\beta$  et en déduire la vitesse de propagation  $v$  des ondes dans la ligne.

[50] Exprimer l'impédance caractéristique  $Z_0$  de la ligne coaxiale puis  $I(z)$  en fonction de  $Z_0$ . Vérifier que dans le cas sans dissipation, on retrouve bien l'impédance caractéristique d'une ligne coaxiale sans perte.

[51] On suppose maintenant que la ligne de transmission est terminée par une impédance de charge  $Z_L$  en  $z = 0$ . Exprimer  $Z_L$  en fonction de  $V$  et  $I$  et montrer qu'on peut définir un coefficient de réflexion  $\Gamma$  de l'onde de tension. A quel coefficient de réflexion cela vous fait-il penser?

[52] Montrer que l'impédance d'entrée de la ligne de transmission vu de la position  $z = -l$  est

$$Z_e = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh(\gamma l)}{Z_0 + Z_L \tanh(\gamma l)} \quad (2.7)$$

## 2.2 Résonateur micro-onde

Nous allons maintenant nous intéresser à l'implémentation et à l'étude d'un résonateur à partir d'une ligne de transmission coaxiale. Dans la pratique pour les expériences d'électrodynamique quantique sur circuit, le signal micro-onde est transporté jusqu'au résonateur par une ligne coaxiale comme étudiée dans la partie précédente. Le résonateur est quant à lui réalisé avec une ligne de transmission coaxiale coplanaire sur une puce.

[53] Peut-on utiliser le formalisme précédemment développé pour étudier une ligne de transmission coplanaire? Qu'est ce que cela changera?

[54] On considère premièrement une ligne de transmission coaxiale de longueur finie  $L_0$ , donc terminée à ses deux extrémités. Montrer à partir de l'équation 2.7 que l'impédance d'entrée de cette ligne finie est

$$Z_e = Z_0 \frac{1 + j \tan(\beta L_0) \tanh(\alpha L_0)}{\tanh(\alpha L_0) + j \tan(\beta L_0)} \quad (2.8)$$

[55] Donner les conditions aux limites de l'onde de tension et de l'onde de courant. En déduire l'expression des longueurs d'ondes  $\lambda_n$  et des pulsations  $\omega_n$  des modes de ce résonateur. Dans la suite on se restreindra au mode fondamental  $\omega_0$ .

[56] On se place proche du mode fondamental. On note  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$  avec  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . On suppose par ailleurs que les pertes par dissipation sont faibles sur la longueur de ligne considérée, et ce jusqu'à la fin du sujet. Simplifier l'expression de  $Z_e$  avec ces hypothèses.

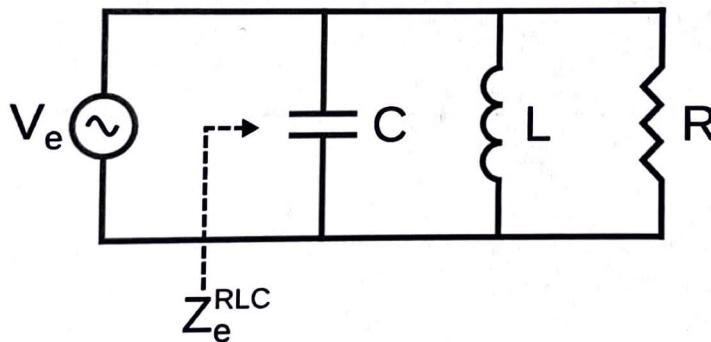


Figure 2.2: Circuit RLC parallèle.

[57] On considère maintenant le circuit RLC parallèle de la figure 2.2. Montrer que l'impédance d'entrée vaut

$$Z_e^{RLC} = \frac{A}{1 + jB\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad (2.9)$$

où l'on donnera l'expression de  $A$ ,  $B$  et  $\omega_0$  en fonction de  $R$ ,  $C$  et  $L$ .

[58] On considère à nouveau  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$  avec  $\Delta\omega \ll \omega_0$  dans l'expression 2.9. Peut-on modéliser la ligne de transmission de longueur  $L_0$  par ce résonateur RLC? Si oui, que peut-on dire sur les expressions de  $R$ ,  $L$  et  $C$  en fonction des paramètres de la ligne coplanaire  $\alpha$ ,  $Z_0$ ,  $L_0$ ,  $L_1$  et  $C_1$ .

[59] Un paramètre important d'un résonateur est son facteur de qualité interne  $Q$  qui se définit comme:

$$Q = \omega \frac{\text{énergie moyenne stockée dans le résonateur}}{\text{énergie perdue par seconde}}, \quad (2.10)$$

où la moyenne est temporelle. Exprimer le facteur de qualité interne  $Q$  à résonance en fonction de  $\omega_0$ ,  $R$  et  $C$ , puis en fonction des constantes de propagation  $\alpha$  et  $\beta$ .

[60] Un autre paramètre important dans le cadre de l'électrodynamique quantique est la tension quadratique moyenne  $V_{\text{rms}}^0$  dans le résonateur pour zéro photon (ce qui correspond aux fluctuations quantiques du vide). La mécanique quantique nous donne l'énergie d'un résonateur de mode  $\omega_0$  comme étant  $E = \hbar\omega_0(n + 1/2)$  avec  $n$  le nombre de photons. Calculer  $V_{\text{rms}}^0$  en fonction du nombre de photon et montrer que

$$V_{\text{rms}}^0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2C}}. \quad (2.11)$$

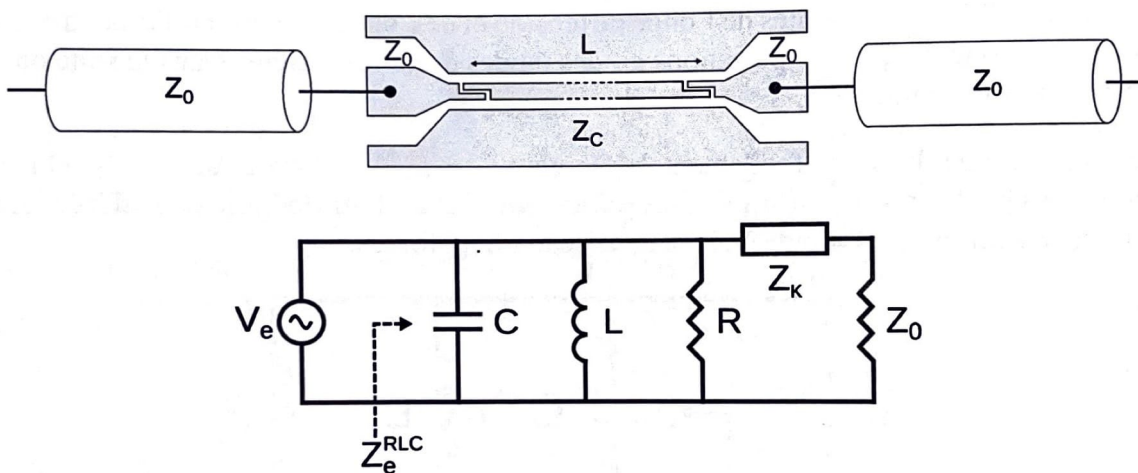


Figure 2.3: (En haut) Illustration d'un résonateur en géométrie guide d'onde coplanaire couplé à deux lignes de transmission d'impédance caractéristique  $Z_0$ . La partie résonateur a une impédance caractéristique  $Z_C$  et les parties guide d'onde coplanaire connectées aux lignes coaxiales ont une impédance caractéristique  $Z_0$ . (En bas) Schéma électrocinétique équivalent ne prenant en compte que le port de sortie du résonateur.

[61] Dans la pratique, le résonateur doit être couplé au "monde extérieur" pour être mesuré, comme représenté sur la figure 2.3. Par quel dipôle électrostatique d'impédance  $Z_k$  peut-on modéliser l'élément de couplage (appelé port d'entrée ou port de sortie) du résonateur aux lignes de transmission d'impédance  $Z_0$  d'après la figure?

[62] En utilisant le modèle électrocinétique de la figure 2.3 pour le port de sortie, montrer qu'on peut remplacer l'addition en série des impédances  $Z_k$  et  $Z_0$  au circuit RLC par une addition en parallèle avec des impédances  $\tilde{Z}_k$  et  $\tilde{Z}_0$  dont on donnera les expressions.

[63] On se place à un mode, soit  $\omega = \omega_0$ . On a typiquement  $Z_0 = 50 \Omega$  et  $|Z_k| \approx 8 \text{ k}\Omega$ . Le couplage du résonateur à la ligne de sortie a-t'il un effet sur la fréquence de résonance du résonateur. Si oui donner l'expression de la nouvelle fréquence de résonance.

[64] Que peut-on dire qualitativement sur l'influence des ports de couplage sur le facteur de qualité de la résonance?

### 2.3 Électromètre ultra-sensible

On va maintenant coupler ce résonateur à une boîte à électrons de type îlot électronique comme étudié au 1.1. Aucun résultat de la partie 1.1 n'est nécessaire pour ce qui suit. En physique de la matière condensée, on s'intéresse à la compressibilité  $\chi$  du gaz d'électrons dans un système donné. La compressibilité électronique  $\chi$  est la capacité du système à changer son nombre de charges  $n$  lorsqu'on varie son potentiel chimique  $\mu$ . On suppose ici que les charges ne peuvent venir que des sources de tension  $V_1 = 0$  et  $V_2 = 0$  de la figure 1.1 avec un taux de transfert de charge vers l'îlot  $\Gamma \gg \omega_0$ . Le potentiel chimique de l'îlot est  $\mu = eV$  avec  $V$  le potentiel électrostatique de l'îlot qui est maintenant modulé à la pulsation  $\omega_0$ . On continue à noter  $C$  la capacité du résonateur et on pourra utiliser  $C_{\text{îlot}}$  pour la capacité de l'îlot électronique.

[65] Justifier que les hypothèses de travail nous permettent de dire que  $\chi$  est une bonne quantité thermodynamique et montrer que  $e^2\chi$  est homogène à une capacité. Il s'agit de la capacité quantique  $C_q$  de la boîte à électrons.

[66] Le couplage de l'îlot au résonateur est équivalent à ajouter en parallèle au résonateur RLC une capacité  $\tilde{C} = \alpha_r^2 C_q$  où  $\alpha_r \leq 1$  est le bras de levier capacitif du résonateur similairement défini à celui de la question 8. Calculer la variation de la fréquence de résonance  $\Delta\omega_0$  dû à  $C_q$  et faire un développement au premier ordre sachant que  $C_q \ll C$ .

Il est possible de mesurer l'argument  $\phi(\omega)$  de l'impédance du résonateur  $Z_e^{\text{RLC}}$  en mesurant l'onde électromagnétique transmise. On notera  $Q$  le facteur de qualité total du résonateur couplé.

[67] On fixe la pulsation à laquelle on mesure à  $\omega = \omega_0$  lorsque  $C_q = 0$ . On mesure alors  $\phi_0$ . Calculer la phase  $\phi$ , lorsque  $C_q$  est non nulle, ainsi que la variation de phase  $\delta\phi = \phi - \phi_0$  résultante. Faire un développement limité au premier ordre. Quel est l'intérêt d'avoir un grand facteur de qualité  $Q$ ?

[68] Tracer  $\phi(\omega)$  pour les deux situations où  $C_q$  est nulle et finie et indiquer clairement la variation de phase mesurée  $\delta\phi$ .

[69] L'électrométrie consiste à mesurer la variation du nombre de charges  $n$  dans le système. Exprimer  $n$  en fonction de la capacité quantique  $C_q$  et de  $V_{\text{rms}}$ .

[70] Dans la pratique, on a de grands facteurs de qualité du résonateur en utilisant des matériaux supraconducteurs. L'état de l'art de électrométrie a été obtenu avec  $Q = 13000$ ,  $C = 75$  pF,  $\alpha_r^2 = 0.1$ ,  $V_{\text{rms}}^0 = 2 \mu\text{V}$ , 200 photons dans le résonateur et une résolution en phase  $\Delta\phi = 0.01^\circ$ . Donner la résolution sur la mesure de la variation de la capacité quantique,  $\Delta C_q$  puis la résolution sur la variation du nombre de charge, notée  $\Delta n$ .

[71] Cela fait-il sens selon vous de pouvoir mesurer  $\Delta n \ll 1$  électron?

★ ★ ★

FIN

# Formulaire

## Opérateurs vectoriels

Dans le texte, on note les vecteurs en gras, soit  $\vec{A} = \mathbf{A}$  et l'opérateur  $\nabla$  est utilisé pour l'opérateur gradient. On rappelle les formules suivantes

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \Delta \mathbf{A},$$

avec  $\Delta$  l'opérateur Laplacien. En coordonnées cylindriques, on a

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] \mathbf{u}_\rho + \left[ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \mathbf{u}_\phi + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{u}_z$$

## Équations

Dans un milieu continu, les équations de Maxwell sont

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J}_l + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}$$

avec  $\mathbf{E}$  le vecteur champ électrique,  $\mathbf{D}$  le vecteur induction électrique,  $\mathbf{H}$  le vecteur champ magnétique,  $\mathbf{B}$  le vecteur induction magnétique,  $\rho_l$  la densité de charge libre,  $\mathbf{J}_l$  le vecteur densité de courant libre,  $\epsilon$  la permittivité du milieu et  $\mu$  la perméabilité du milieu.

## Constantes de la physique

On donne les valeurs des constantes suivantes:

- Permittivité du vide  $\epsilon_0 = 8.8541878128 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
- Perméabilité du vide  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
- Constante de Planck  $h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$
- Constante de Planck réduite  $\hbar = h/(2\pi) = 1.054571817 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$