Mathématiques A MP 2023 (XLCR)

Pandou

26 avril 2023

1 Préliminaires

1. (a) Il a été admis que $\mathbb{H}$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{C})$. Soit $z_1, z_2, z_1', z_2' \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} Z(z_1,z_2)Z(z_1',z_2') &= \begin{pmatrix} z_1z_1' - z_2\overline{z_2'} & -z_1\overline{z_2'} - \overline{z_2}\,\overline{z_1'} \\ z_2z_1' + \overline{z_1}z_2 & -z_2\overline{z_2'} + \overline{z_1}\,\overline{z_1'} \end{pmatrix} \\ &= Z\big(z_1z_1' - \overline{z_2}z_2', z_2z_1' + \overline{z_1}z_2\big) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{H}$ est stable par produit.
Soit $A = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix}$, alors $A^* = \begin{pmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix} = Z(\overline{z_1}, -z_2)$. Donc, $\mathbb{H}$ est aussi stable par $Z \longmapsto Z^*$.

(b) Soit $Z = Z(z_1,z_2) \in \mathbb{H}$, alors on fait le calcul :

$$\begin{aligned} ZZ^* &= Z(z_1,z_2)Z(\overline{z_1}, -z_2) \\ &= Z\big(|z_1|^2 + |z_2|^2, 0\big) \\ &= \big(|z_1|^2 + |z_2|^2\big)E \end{aligned}$$

Ainsi, tout élément non nul $Z \in \mathbb{H}$ est inversible et

$$Z^{-1} = \frac{1}{N(Z)}Z^*$$

(c) Soit $Z(a,b) \in \mathbb{H}$, on suppose que $Z(a,b)$ commute avec tous les éléments de $\mathbb{H}$. En particulier, elle commute avec J et K. On a

$$\begin{cases} Z(a,b)J = JZ(a,b) \\ Z(a,b)K = KZ(a,b) \end{cases} \iff \begin{cases} Z(a,b)Z(0,-1) = Z(0,-1)Z(a,b) \\ Z(a,b)Z(0,i) = Z(0,i)Z(a,b) \end{cases} \iff \begin{cases} Z(\overline{b}, -\overline{a}) = Z(b,-a) \\ Z(-i\overline{b}, i\overline{a}) = Z(ib, ia) \end{cases}$$

Ainsi, on en déduit d'une part que $\overline{b} = b$ et $\overline{a} = a$, autrement dit $a, b \in \mathbb{R}$. D'autre part, $-\overline{b} = b$, d'où $b = 0$.
On en déduit que Z est de la forme aE pour $a \in \mathbb{R}$: $Z \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}}$.

Réciproquement, les matrices de cette forme commutent bien avec tous les éléments de $\mathbb{H}$.

2. (a) On a

$$\begin{aligned} N(ZZ')E &= (ZZ')(ZZ')^* \\ &= (ZZ')(Z'^*Z^*) \\ &= Z(Z'Z'^*)Z^* \\ &= N(Z')ZZ^* \\ &= N(Z')N(Z)E \end{aligned}$$

Et donc, on a $N(ZZ') = N(Z')N(Z) = N(Z)N(Z')$.

(b) $E \in S$ de façon immédiate. Si $Z, Z' \in S$, on a $N(ZZ') = N(Z)N(Z') = 1$ et donc $ZZ' \in S$. Finalement, si $Z \in S$, alors $Z^{-1} = Z^*$ et un calcul rapide donne $N(Z^*) = N(Z)$, donc $Z^{-1} \in S$. Ainsi, S est un sous-groupe de $\mathbb{H}^{\times}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $Z \in \mathbb{H}^*$, on a $N(\lambda Z)E = (\lambda Z)(\lambda Z)^* = \lambda^2 N(Z)E$ et donc $N(\lambda Z) = \lambda^2 N(Z)$. Ainsi, on a

$$N\left(\frac{1}{\sqrt{N(Z)}}Z\right) = \frac{1}{N(Z)}N(Z) = 1$$

Donc, $\dfrac{1}{\sqrt{N(Z)}}Z \in S$.

3. (a) On calcule

$$\begin{array}{rcl} N(xE + yI + zJ + tK) & = & N\big(Z(x+iy, -z+it)\big) \\ & = & |x+iy|^2 + |-z+it|^2 \\ & = & x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \end{array}$$

(b) Soit $U = xI + yJ + zK \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$, on a

$$\begin{array}{rcl} U^2 & = & x^2I^2 + y^2J^2 + z^2K^2 + xy(IJ+JI) + xz(IK+KI) + yz(KJ+JK) \\ & = & -(x^2+y^2+z^2)E \\ & = & -N(U)E \end{array}$$

Réciproquement, si $U \in \mathbb{U}$ tel que $U^2 = -\lambda E$ avec $\lambda < 0$. On écrit $U = xE + \underbrace{yI + zJ + tK}_{:=\widetilde{U}}$ de sorte que

$$\begin{array}{rcl} U^2 & = & x^2E^2 + \widetilde{U}^2 + 2x\widetilde{U} \\ & = & \big(x^2 - N(\widetilde{U})\big)E + 2x\widetilde{U} \end{array}$$

Ainsi, pour que U^2 puisse être colinéaire à E, cela impose $x = 0$. Et donc, $U \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.

4. D'après $3a.$, l'application ψ réalise une isométrie entre S et la sphère unité $\mathbb{S}^3$ de $\mathbb{R}^4$ qui est immédiatement fermée comme image réciproque de $\{1\}$ par la norme euclidienne canonique.
Pour la connexité par arcs, il suffit de montrer que la sphère unité $\mathbb{S}^3$ est connexe par arcs. Soit $u, v \in \mathbb{S}^3$ qui ne sont pas colinéaires, alors $\gamma : t \in [0,1] \longmapsto \dfrac{tu + (1-t)v}{\|tu + (1-t)v\|}$ est un chemin entre v et u qui est bien défini car $tu + (1-t)v \neq 0$ pour tout $t \in [0,1]$.
Si maintenant u et v sont colinéaires, on peut trouver $w \in \mathbb{S}^3$ non colinéaire à u (car $\mathbb{R}^4$ est de dimension $\geqslant 2$) et on passe de u à v en passant par w.

5. (a) On calcule

$$\begin{array}{rcl} \langle U, V\rangle E & = & \dfrac{1}{2}\big(N(U+V) - N(U) - N(V)\big)E \\ & = & -\dfrac{1}{2}\big((U+V)^2 - U^2 - V^2\big) \\ & = & -(UV + VU) \end{array}$$

Ainsi, U et V sont orthogonaux si, et seulement si, $UV + VU = 0$.

On a alors $(UV)^2 = U(VU)V = -U(UV)V = -U^2V^2 = -N(U)N(V)E$ car $U, V \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ et donc d'après $3b.$, $UV \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.

On écrit $U = x_UI + y_UJ + z_UK$ et $V = x_VI + y_VJ + z_VK$ de sorte que

$$UV = (x_Uy_J - y_Ux_V)K + (y_Uz_V - z_Uy_V)I + (z_Ux_V - x_Uz_V)J$$

De sorte que la matrice de (U, V, UV) dans la base (I, J, K) est $\begin{pmatrix} x_U & x_V & y_Uz_V - z_Uy_V \\ y_U & y_V & z_Ux_V - x_Uz_V \\ z_U & z_V & x_Uy_V - y_Uv_X \end{pmatrix}$.

On développe par rapport à la dernière colonne :

$$\det_{(I,J,K)}(U, V, UV) = (y_Uz_V - z_Uy_V)^2 + (z_Ux_V - x_Uz_V)^2 + (x_Uy_V - y_Vx_V)^2 \geqslant 0$$

Remarque : Ce n'est pas au programme, mais on reconnait en fait dans UV les coordonnées du produit vectoriel $u \wedge v$... Rappelons que dans $\mathbb{R}^3$, on a l'expression suivante : $\det(u,v,w) = (u \wedge v) \cdot w$, ce qui donnerait ici $\det\big(u,v,u\wedge v\big) = \|u \wedge v\|^2$, ce qui est bien en accord avec ce qu'on a trouvé.

(b) D'après le calcul précédent, si (U,V,UV) est une base orthonormée, alors elle est directe, car son déterminant est >0.
Reste à vérifier que $UV \perp U$ et $UV \perp V$. Pour cela, on calcule :

$$U(UV) + (UV)U = U^2V - U^2V = 0 \qquad \text{et} \qquad V(UV) + UV(V) = -UV^2 + UV^2 = 0$$

Ainsi, (U,V,UV) est une famille orthonormée et donc une base orthonormée directe de $\mathbb{H}^{\text{im}}$ (car $\mathbb{H}^{\text{im}}$ est de dimension 3.

2 Automorphismes de $\mathbb{H}$ et rotations

6. Soit $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in S$ et $Z \in \mathbb{H}$, alors

$$\begin{array}{rcl} \alpha(u_1,v_1)\circ\alpha(u_2,v_2)\cdot Z & = & \alpha(u_1,v_1)\cdot(u_2Zv_2^{-1}) \\ & = & u_1u_2Zv_2^{-1}v_1^{-1} \\ & = & (u_1u_2)Z(v_1v_2)^{-1} \\ & = & \alpha(u_1u_2,v_1v_2)\cdot Z \end{array}$$

Ainsi, on a montré que α est un morphisme de groupes.

On a
$$\mathrm{Ker}(\alpha) = \big\{(u,v)\in S, \forall Z \in \mathbb{H}, uZv^{-1} = Z\big\} = \{(u,v)\in S, \forall Z\in\mathbb{H}, uZ = Zv\}$$
Soit $(u,v) \in \mathrm{Ker}(\alpha)$, en prenant $Z = u$, on trouve $u = v$. Ainsi, u commute avec tous les éléments de S, donc, en renormalisant, avec tous les éléments de $\mathbb{H}$. Ainsi, $u \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}}$ et $u \in S$, on a $u = \pm 1$. La réciproque étant immédiate, on a
$$\mathrm{Ker}(\alpha) = \{(1,1),(-1,-1)\}$$

7. L'application α est continu par continuité de l'inverse matriciel et du produit matriciel. Soit $(u,v)\in S\times S$, on montre que $\alpha(u,v)$ est une isométrie. Soit $Z \in \mathbb{H}$, on calcule

$$N\big(\alpha(u,v)\cdot Z\big) = N(uZv^{-1}) = N(u)N(Z)N(v^{-1}) = N(Z)$$

car $u,v\in S$. Ainsi, $\alpha(u,v)$ est une isométrie et donc $\alpha(u,v) \in O(\mathbb{H})$.
On a vu S est connexe par arcs et $S\times S$ est connexe par arcs, donc par continuité, $\alpha(S\times S)$ est connexe par arcs et contient l'identité.
Comme det est continu, $\det\big(\alpha(S\times S)\big)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^*$ contenant 1 : c'est $]0,+\infty[$. Donc, $\det\big(\alpha(S\times S)\big) > 0$ et donc $\alpha(S\times S) \in SO(\mathbb{H})$.

8. (a) D'après ce qui a été dit à la question 3., $\mathbb{R}_{\mathbb{H}} \perp \mathbb{H}^{\text{im}}$, donc

$$N(u) = \cos(\theta)^2N(E) + \sin(\theta)^2N(v) = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$$

On calcule

$$\big(\cos\theta E + \sin\theta v\big)\big(\cos\theta E - \sin\theta v\big) = \cos(\theta)^2E - \sin(\theta)^2v^2 = \cos(\theta)^2E + \sin(\theta)^2N(v)E = E$$

Ainsi, l'inverse de u est bien $\cos(\theta)E - \sin(\theta)v$.

(b) On calcule, en utilisant les propriétés $xy = -yx$ (quand $x,y\in\mathbb{H}^{\text{im}}$ sont orthogonaux) et $x^2 = -E$:

$$\begin{array}{rcl} C_u(v) & = & uvu^{-1} \\ & = & \big(\cos\theta E + \sin\theta v\big)v\big(\cos\theta E - \sin\theta v\big) \\ & = & \big(\cos(\theta)^2E - \sin(\theta)^2v\big)v \\ & = & v \end{array}$$

puis,

$$\begin{aligned} C_u(w) &= uwu^{-1} \\ &= \big(\cos\theta E + \sin\theta v\big) w \big(\cos\theta E - \sin\theta v\big) \\ &= \cos(\theta)^2 w - \cos(\theta)\sin(\theta) wv + \sin(\theta)\cos(\theta) vw - \sin(\theta)^2 vwv \\ &= \big(\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2\big) w + \cos(\theta)\sin(\theta)(vw - wv) \\ &= \cos(2\theta) w + \sin(2\theta) vw \end{aligned}$$

et enfin,

$$\begin{aligned} C_u(vw) &= uvwu^{-1} \\ &= \big(\cos\theta E + \sin\theta v\big) vw \big(\cos\theta E - \sin\theta v\big) \\ &= \cos(\theta)^2 vw + \sin(\theta)\cos(\theta) v^2 w - \cos(\theta)\sin(\theta) vwv - \sin(\theta)^2 v^2 wv \\ &= \big(\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2\big) vw - 2\sin(\theta)\cos(\theta) w \\ &= \cos(2\theta) vw - \sin(2\theta) w \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\mathrm{Mat}_{(v,w,vw)} C_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ 0 & \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

9. Soit $V \in SO(\mathbb{H}^{\mathrm{im}})$ une rotation d'axe dirigée par v et d'angle θ, on définit de même u comme dans la question précédente. Alors, la rotation associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ 0 & \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$ écrite dans la base (v, w, vw) vérifie $C_u = V$.
Il est immédiat de vérifier que $u \longmapsto C_u$ est un morphisme de groupes et il est surjectif d'après ce qu'on vient de dire.
Enfin, on a

$$\mathrm{Ker}(C) = \big\{u \in S, \forall Z \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}, uZu^{-1} = Z\big\} = \big\{u \in S, \forall Z \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}, uZ = Zu\big\}$$

Soit $u \in \mathrm{Ker}(C)$, alors u commute avec tous les éléments de $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ et donc de $\mathbb{H}$, donc $u \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}}$ et est unitaire, donc $u = \pm 1$. La réciproque étant immédiate, on a

$$\mathrm{Ker}(C) = \{\pm 1\}$$

10. (a) Soit $r \in SO(\mathbb{H})$. On distingue deux cas :
- Si $r(1) = 1$, alors r stabilise $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ par orthogonalité et donc il existe $v \in S$ tel que $r_{|\mathbb{H}^{\mathrm{im}}} = C_v$. Alors, on a
$$r = \alpha(v, v)$$
- Sinon, on note $r(1) = p \in S$ de sorte qu'on ait :
$$\alpha(\overline{p}, 1) \circ r(1) = \alpha(\overline{p}, 1) \cdot p = 1$$
Par le point précédent, il existe alors $v \in S$ tel que $\alpha(\overline{p}, 1) \circ r = \alpha(v, v)$ et donc, on a
$$r = \alpha(pv, v)$$

Ainsi, $\alpha : S \times S \longrightarrow SO(\mathbb{H})$ est surjective.

(b) $S \times \{E\}$ est un sous-groupe de $S \times S$, donc son image directe par le morphisme α est un sous-groupe de $SO(\mathbb{H})$.
Soit $n \in N$ et $g \in SO(\mathbb{H})$, on écrit $n = \alpha(p, 1)$ avec $u \in S$. De plus, comme α est surjective, on peut écrire $g = \alpha(u, v)$. Le reste est de l'écriture :

$$gng^{-1} = \alpha(u, v)\alpha(p, 1)\alpha(u^{-1}, v^{-1}) = \alpha(upu^{-1}, 1) \in N$$

On a vu dans la question précédente qu'un élément de N stabilise $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ est y induit une rotation. On en déduit déjà que N est un sous-groupe strict de $SO(\mathbb{H})$.
Enfin, en prenant une rotation non triviale, qui n'est pas un retournement de $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$, elle induit un élément de $SO(\mathbb{H})$ qui n'est pas $\pm\mathrm{Id}$.

11. Si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, alors $(f^{-1})_{|\mathbb{R}_{\mathbb{H}}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_{\mathbb{H}}}$ et que $f^{-1}(uv) = f^{-1}(u)f^{-1}(v)$, en effet

$$f\big(f^{-1}(uv)\big) = uv = f\big(f^{-1}(u)f^{-1}(v)\big)$$

Enfin, $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est clairement stable par composition. Donc, $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est un sous-groupe de $GL(\mathbb{H})$.
Si $Z \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}}$, alors Z commute avec u, donc $\alpha(u,u)\cdot Z = Z$ et $\alpha(u,u)_{|\mathbb{R}_{\mathbb{H}}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_{\mathbb{H}}}$. Enfin, si $Z, Z' \in \mathbb{H}$, alors

$$\alpha(u,u)\cdot(ZZ') = u(ZZ')u^{-1} = (uZu^{-1})(uZ'u^{-1}) = (\alpha(u,u)\cdot Z)(\alpha(u,u)\cdot Z)$$

Et donc, $\alpha(u,u) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.

12. Si $U, V \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ sont orthogonaux, alors $f(U)f(V) + f(V)f(U) = f(UV + VU) = f(0) = 0$, donc f préserve l'orthogonalité. De même, f préserve la norme : en effet, la relation $f(U^2) = f(U)^2$ s'écrit d'une part $f\big(-N(U)E\big)$ et d'autre part $-N\big(f(U)\big)E$.

Ainsi, $\big(f(I), f(J), f(K)\big)$ est une base orthonormée de $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$. Il existe alors un signe $\varepsilon = \pm 1$ tel que $\big(f(I), f(J), \varepsilon f(K)\big)$ est une base directe de $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.
Mais alors il existe $u \in S$ tel que

$$\alpha(u,u)\cdot I = f(I), \qquad \alpha(u,u)\cdot J = f(J) \qquad \text{et} \qquad \alpha(u,u)\cdot K = \varepsilon f(K)$$

Mais alors, la relation $f(I)f(J) = f(K)$ s'écrit

$$(\alpha(u,u)\cdot I)(\alpha(u,u)\cdot J) = f(K) \qquad \text{et} \qquad (\alpha(u,u)\cdot I)(\alpha(u,u)\cdot J) = \alpha(u,u)\cdot K = \varepsilon f(K)$$

Donc, $\varepsilon = 1$. Ainsi, $\big(f(I), f(J), f(K)\big)$ est directe.

13. (a) Il s'agit de montrer que l'application $u \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \longmapsto u_{|\mathbb{H}^{\mathrm{im}}} \in SO(\mathbb{H}^{\mathrm{im}})$ est un isomorphisme.
Déjà elle est bien définie, en effet, on a vu à la question précédente qu'un automorphisme transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée directe, donc $u_{|\mathbb{H}^{\mathrm{im}}} \in SO(\mathbb{H}^{\mathrm{im}})$.
On a déjà vu qu'il était surjectif à la question 8..
Enfin, si u induit l'identité sur $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$, alors, comme il induit l'identité déjà sur $\mathbb{R}_{\mathbb{H}}$, on en déduit que u est l'identité. Autrement dit, la restriction est injective. On a ainsi un isomorphisme de groupes

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \simeq SO(\mathbb{H}^{\mathrm{im}})$$

(b) Soit u un automorphisme de $\mathbb{H}$, alors il existe $v \in S$ tel que $u_{|\mathbb{H}^{\mathrm{im}}} = \alpha(v,v)_{|\mathbb{H}^{\mathrm{im}}}$, ces deux applications coincident sur $\mathbb{R}_{\mathbb{H}}$, ainsi $u = \alpha(v,v)$.

3 Normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^2$

14. (a) Soit $A \in \mathcal{K}$, on considère la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|$, ie $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$, prenons x unitaire de sorte que $\|A\| = \|Ax\|$, alors on a $\|A\| \leqslant \|x\|_2$ et donc $\mathcal{K}$ est borné.
Soit $x \in \mathbb{R}^2$, on note $f_x : A \longmapsto \|Ax\|$ continue, alors $f_x^{-1}\big([0, \|x\|_2]\big)$ est un fermé comme image réciproque d'un fermé. Alors, $\mathcal{K}$ est fermé comme intersection de fermés.
Ainsi, $\mathcal{K}$ est un fermé borné, donc compact de $M_2(\mathbb{R})$.

Soit $A, B \in \mathcal{K}$ et $\lambda \in [0,1]$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\big\|(\lambda A + (1-\lambda)B)x\big\| \leqslant \lambda\|Ax\| + (1-\lambda)\|Bx\| \leqslant \lambda\|x\|_2 + (1-\lambda)\|x\|_2 = \|x\|_2$$

Ainsi, $\lambda A + (1-\lambda)B \in \mathcal{K}$ et donc $\mathcal{K}$ est convexe.

(b) L'application det est continue sur le compact $\mathcal{K}$, ainsi elle réalise sa borne supérieure en un point de $\mathcal{K}$.

15. Comme $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes, il existe une constante C tel que $\|\cdot\| \leqslant C\|\cdot\|_2$. Alors, la matrice $A = \dfrac{1}{C} I_n$ est un élément de $\mathcal{K}$, donc le déterminant est > 0. Ainsi, $\det(A) > 0$.

$\mathcal{C}$ étant compact, il existe $x \in \mathcal{C}$ pour lequel $\|Ax\|$ est maximal, on note $\alpha = \|Ax\|$. Par hypothèse, on a $\alpha \leqslant 1$. Supposons par l'absurde que $\alpha < 1$, alors $\dfrac{1}{\alpha}A \in \mathcal{K}$. En effet, si $x \in \mathcal{C}$, on a

$$\left\|\frac{1}{\alpha}Ax\right\| \leqslant 1 = \|x\|_2$$

Si $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $x = \dfrac{y}{\|y\|_2} \in \mathcal{C}$ et donc, on a

$$\left\|\frac{1}{\alpha}Ay\right\| = \left\|\frac{\|y\|_2}{\alpha}Ax\right\| \leqslant \|y\|_2$$

Et donc, on a $\dfrac{1}{\alpha}A \in \mathcal{K}$ et $\dfrac{1}{\alpha} > 1$, donc $\det\left(\dfrac{1}{\alpha}A\right) > \det(A)$, ce qui contredit la maximalité de $\det(A)$. Ainsi, $\|Ax\| = 1$.

16. (a) On remarque que $AB \in K$, en effet, $\|ABx\| \leqslant \|Bx\|_2 = \|x\|_2$ car B est orthogonale.

Supposons par l'absurde que pour tout $x_r \in \mathcal{C}$, $\left\|AB\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix}x_r\right\| \leqslant 1$, c'est-à-dire $AB\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix}$. Par convexité, on a

$$C_r := (1-r)AB\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix} + rAB \in K$$

Or,

$$\det(C_r) = \det(AB)\begin{vmatrix} (1-r)r + r & 0 \\ 0 & \dfrac{1-r}{r} + r\end{vmatrix} = \det(A)(2-r)(r^2 - r + 1)$$

Une étude de la fonction $r \longmapsto (2-r)(r^2 - r + 1)$ montre qu'elle est strictement décroissante sur $]0,1[$, donc $g(r) > g(1) = 1$, ie $\det(C_r) > \det(A)$, ce qui contredit la maximalité de $\det(A)$.

(b) Comme $x_r \in \mathcal{C}$, on a déjà $y_r^2 + z_r^2 = 1$. De plus,

$$1 < \left\|AB\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix}x_r\right\|^2 \leqslant \left\|\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix}x_r\right\|_2^2 = r^2y_r^2 + \frac{z_r^2}{r^2}$$

Cette inégalité s'écrit $z_r^2\left(r^{-2} - r^2\right) + r^2 > 1$, ie $z_r^2 > \dfrac{1-r^2}{r^{-2}-r^2}$. Or, on a $\dfrac{1-r^2}{r^{-2}-r^2} = \dfrac{r^2-r^4}{1-r^4} = \dfrac{r^2}{1+r^2}$. D'où l'inégalité

$$z_r^2 > \frac{r^2}{1+r^2}$$

17. Soit (r_n) une suite d'éléments de $]0,1[$ qui converge vers 1. Alors la suite $\left(x_{r_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact $\mathcal{C}$ et donc, quitte à extraire, on suppose qu'elle converge vers $x^* \in \mathcal{C}$. On passe à la limite dans l'inégalité $1 < \left\|AB\begin{pmatrix} r_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_n}\end{pmatrix}x_{r_n}\right\|$ pour obtenir $1 \leqslant \|ABx^*\|$.

Mais d'autre part, $\|ABx^*\| \leqslant \|Bx^*\|_2 = \|x^*\|_2 = 1$, donc en fait on a égalité :

$$\|ABx^*\| = 1$$

De plus, l'inégalité $z_{r_n} > \dfrac{r_n^2}{1+r_n^2}$ passe à la limite en $z^* \geqslant \dfrac{1}{2}$, donc (e_1, x^*) est une base de $\mathbb{R}^2$ (où e_1 est le premier vecteur de la base canonique). On considère $x_1 = Be_1 = x$ et $x_2 = Bx^*$, on a alors par construction :

$$\|Ax_1\| = 1 = \|x_1\|_2 \qquad \text{et} \qquad \|Ax_2\| = \|ABx^*\| = 1 = \|x_2\|_2$$

18. L'idée est de raisonner géométriquement en paramétrisant le cercle par l'exponentielle complexe qui permet plutôt de raisonner sur les angles, puis de raisonner par dichotomie sur les angles.

- Soit $T' = \{x \in T, -x \in T\}$. On montre que si $a \in T'$ et $b \in T$ avec $a \neq \pm b$, alors $\dfrac{a+b}{\|a+b\|_2} \in T'$.

  En effet, on a $-a \in T$ et $-a \neq \pm(-b)$, donc $\dfrac{-a-b}{\|a+b\|_2} = -\dfrac{a+b}{\|a+b\|_2} \in T$ et donc $\dfrac{a+b}{\|a+b\|_2} \in T'$.

  De plus, il existe $a, b \in T'$ tels que $a \neq \pm b$. En effet, soit $x, y \in T$ tels que $x \neq \pm y$, qui existent pas hypothèse sur T. Soit $a = \dfrac{x-y}{\|x-y\|_2} \in T$ et comme $-a$ est aussi dans T par symétrie, on en déduit que $a \in T'$. Et on prend pour b soit x, soit y. En effet, si on avait $a \in \{\pm x, \pm y\}$, alors $x = \pm y$, ce qui est exclu.
- On considère $e : \theta \in \mathbb{R} \longmapsto e^{2i\pi\theta} \in \mathcal{C}$. On note $R = e^{-1}(T')$. Dire que $e(\theta) = \pm e(\psi)$ revient à dire que $\theta \notin \psi + \dfrac{1}{2}\mathbb{Z}$.

  Si $\theta \in R$ et $\psi \in e^{-1}(T)$ avec $\theta \notin \psi + \dfrac{1}{2}\mathbb{Z}$. On va montrer que $\dfrac{\theta+\psi}{2} \in R$.

  Comme $e(\theta) + e(\psi) = 2\cos\left(\dfrac{\theta-\psi}{2}\right) e\left(\dfrac{\theta+\psi}{2}\right)$, on a $\dfrac{e(\theta)+e(\psi)}{\|e(\theta)+e(\psi)\|_2} = \pm e\left(\dfrac{\theta+\psi}{2}\right)$.

  Si le signe est positif, alors $\dfrac{\theta+\psi}{2} \in R$, sinon le signe est négatif, mais comme on a $-\dfrac{e(\theta)+e(\psi)}{\|e(\theta)+e(\psi)\|_2} \in T'$ et on en déduit que $\dfrac{\theta+\psi}{2} \in R$.
- On fixe $x \in \mathbb{R}$ un angle quelconque. On va construire deux suites d'angles (θ_k) et (ψ_k) d'éléments de R telles que $\theta_k \leqslant x \leqslant \psi_k$, $\theta_k \notin \psi_k + \dfrac{1}{2}\mathbb{Z}$, $|\theta_k - \psi_k| \leqslant \dfrac{1}{2^k}|\theta_0 - \psi_0|$ avec (θ_k) croissante et (ψ_k) décroissante.

  On commence par choisir $\theta \in R$ quelconque et $\psi \in e^{-1}(T)$ quelconque tel que $\theta \notin \psi + \dfrac{1}{2}\mathbb{Z}$. On sait que $\dfrac{\theta+\psi}{2} \in R$. Si de plus, on avait $\dfrac{\theta+\psi}{2} \in \theta + \dfrac{1}{2}\mathbb{Z}$, alors $\psi \in \theta + \dfrac{1}{2}\mathbb{Z}$, ce qui n'est pas.

  En particulier, il existe $\theta, \theta' \in R$ tels que $\theta \notin \theta' + \dfrac{1}{2}\mathbb{Z}$. Ceci reste vrai en prenant θ et θ' modulo 1, on peut alors trouver $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $\theta_0 := \theta + k \leqslant x \leqslant \psi_0 := \theta' + \ell$.

  Supposons que les deux suites (θ_k) et (ψ_k) ont leur n premiers termes construits. Alors $\dfrac{\theta_n+\psi_n}{2} \in R$ et n'est ni dans $\theta_n + \dfrac{1}{2}\mathbb{Z}$, ni dans $\psi_n + \dfrac{1}{2}\mathbb{Z}$.

  Si $\theta_n \leqslant x \leqslant \dfrac{\theta_n+\psi_n}{2}$, on pose $\theta_{n+1} = \theta_n$ et $\psi_{n+1} = \dfrac{\theta_n+\psi_n}{2}$. Dans l'autre cas, $\dfrac{\theta_n+\psi_n}{2} \leqslant x \leqslant \psi_n$ et on pose $\psi_{n+1} = \psi_n$ et $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n+\psi_n}{2}$. Dans les deux cas, on a $|\psi_{n+1} - \theta_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|\psi_n - \theta_n| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}|\psi_0 - \theta_0|$ et $\theta_{n+1} \leqslant x \leqslant \psi_{n+1}$ et $\theta_{n+1} \notin \psi_{n+1} + \dfrac{1}{2}\mathbb{Z}$ et $\psi_{n+1} \leqslant \psi_n$ et $\theta_{n+1} \geqslant \theta_n$.

  On a ainsi construit de suites d'angles (θ_k) et (ψ_k) avec les propriétés voulues, elles sont alors adjacentes, donc convergent vers la même limite. Et comme $\theta_k \leqslant x \leqslant \psi_k$, on en déduit que cette limite est x. On a ainsi montré que R est dense dans $\mathbb{R}$ et donc par continuité et surjectivité de e, T est dense dans $\mathcal{C}$ et comme T est fermé : $T = \mathcal{C}$.

19. Supposons qu'on ait une norme telle que pour tout x, y unitaire (pour cette norme), $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \geqslant 4$. On prend A, x_1, x_2 des questions précédentes et $T = \{x \in \mathcal{C}, \|Ax\| = 1\}$. Par construction via la question 17., T contient une base (y_1, y_2) de $\mathbb{R}^2$ où chaque y_i est unitaire (pour la norme $\|\cdot\|$). Si $a, b \in T$ avec $b \neq \pm a$, alors
$$\|A(a+b)\|^2 + \|A(a-b)\|^2 \geqslant 4$$
et $\|A(a \pm b)\| \leqslant \|a \pm b\|_2$, on a
$$4 \leqslant \|A(a+b)\|^2 + \|A(a-b)\|^2 \leqslant \|a+b\|_2^2 + \|a-b\|_2^2 = 4$$
On a donc en fait égalité partout, ie $\|A(a \pm b)\| = \|a \pm b\|_2$ et donc $\dfrac{a \pm b}{\|a \pm b\|_2} \in T$. De plus, T est fermé. Donc, par la question précédente, $T = C$, ie
$$\forall x \in \mathcal{C}, \|Ax\| = 1$$

ce qui implique en particulier que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \|Ax\| = \|x\|_2$$

Comme A est inversible, on a $\|x\| = \|A^{-1}x\|_2$ et donc $\|\cdot\|$ est euclidienne qui vient du produit scalaire $(x|y) = \langle A^{-1}x, A^{-1}y\rangle$.

4 Algèbres valuées

20. (a) Soit $x \in A$, par hypothèse, il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) = 0$. Ainsi, l'idéal $\{P \in \mathbb{R}[X], P(x) = 0\}$ est non réduit à 0 et est donc engendré par un unique polynôme Q unitaire de degré minimal. Q est irréductible, en effet sinon, un de ses facteurs annulerait x, ce qui n'est pas possible. Ainsi, $\deg(Q) \leqslant 2$, ie $x^2 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x$.

    (b) Comme $x \notin \mathbb{R}$, on prend un polynôme de degré 2 irréductible tel que $P(x) = 0$. Son discriminant $\Delta < 0$ admet alors une racine carrée (forme canonique d'un polynôme de degré 2) et donc -1 aussi, que l'on note abusivement $\sqrt{-1}$. Alors $a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x \longmapsto a + ib \in \mathbb{C}$ est un isomorphisme d'algèbres.

21. Comme A n'est pas isomorphe à $\mathbb{R}$, on peut prendre $x \in A \setminus \mathbb{R}$ et par le même procédé que précédemment, on trouve que $i_A^2 = -1$.

22. (a) Soit $x, y \in A$, on calcule :

$$T(xy) = i_A xy i_A = -(i_A x i_A)(i_A y i_A) = -T(x)T(y)$$

    (b) Soit $x \in A$, on a

$$T^2(x) = i_A(i_A x i_A)i_A = x$$

    Donc, $T^2 = \mathrm{Id}$ qui est une symétrie. Ainsi, on en déduit immédiatement que

$$A = \mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(T + \mathrm{Id})$$

23. On a

$$\mathrm{Ker}(T + \mathrm{Id}) = \{x \in A, i_A x i_A = -x\}$$

On a $1, i_A \in \mathrm{Ker}(T + \mathrm{Id})$, de sorte que $U \subset \mathrm{Ker}(T + \mathrm{Id})$.
Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}(T + \mathrm{Id})$, alors $i_A x i_A = -x$ et en multipliant à gauche par i_A, on remarque que x commute avec i_A.
Fixons x non nul qui commute avec i_A. En décomposant $(i_A x)^2$ de deux manières, on trouve via la question 20. :

$$a + b i_A x = c + dx \Longleftrightarrow (b i_A - d)x = c - b$$

Comme U est un corps (isomorphe à $\mathbb{C}$), $b - i_A d$ est inversible dans U, donc $x = \dfrac{c-d}{b i_A d} \in U$. Sauf dans le cas où $b = d = 0$ et dans ce cas, $(i_A x)^2 = -x^2 \in \mathbb{R}$, donc $x^2 \in \mathbb{R}$. Et donc, si $x^2 \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, sinon, $x = \pm i_A\sqrt{-x^2} \in U$.

Dans tous les cas, $x \in U$ et donc, on a montré que $\mathrm{Ker}(T + \mathrm{Id}) \subset U$. D'où l'égalité par double inclusion :

$$\mathrm{Ker}(T + \mathrm{Id}) = U$$

Ainsi, comme A n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}$ et que $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id})$ est de dimension 2, nécessairement, $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id})$ ne peut être réduit à 0..

24. (a) Soit $x \in \mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id})$, de sorte que

$$T(\beta x) = -T(\beta)T(x) = -T(\beta)x = -\beta x$$

    Donc, $\beta x \in \mathrm{Ker}(T + \mathrm{Id})$.
    On a alors en prenant $x = \beta$ que $\beta^2 \in \mathrm{Ker}(T + \mathrm{Id}) = U$.
    Par intégrité, $x \in \mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}) \longmapsto \beta x \in \mathrm{Ker}(T + \mathrm{Id})$ est injectif. On en déduit que $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id})$ est de dimension finie, de dimension 1 ou 2.

Si $\mathrm{Ker}(T-\mathrm{Id})$ était de dimension 1, alors on a $T(i_A\beta) = -T(i_A)T(\beta) = i_A\beta$, donc $i_A\beta \in \mathrm{Ker}(T-\mathrm{Id})$ et donc, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $i_A\beta = \lambda\beta$, ce qui donne $i_A = \lambda \in \mathbb{R}$, contradiction.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(T-\mathrm{Id})$ est de dimension 2. Si $y \in \beta U$, on écrit $y = \beta x$ avec $x \in U$. On a alors

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(\beta x) - \beta x \\ &= -T(\beta)T(x) - \beta x \\ &= \beta x - \beta x = 0 \end{aligned}$$

D'où l'inclusion $\beta U \subset \mathrm{Ker}(T-\mathrm{Id})$ et par égalité de dimension, on a égalité $\mathrm{Ker}(T-\mathrm{Id}) = \beta U$.

(b) On a $U \cap (\mathbb{R} + \mathbb{R}\beta) = \mathbb{R}$, et donc $\beta^2 \in \mathbb{R}$. Si $\beta^2 > 0$, alors on peut écrire $\beta = \pm\gamma \in \mathbb{R}$. Mais alors, β ne peut pas anticommuter avec i_A, donc $\beta \notin \mathrm{Ker}(T+\mathrm{Id})$. On en déduit alors que $\beta^2 < 0$.

(c) Quitte à remplacer β par $\dfrac{\beta}{-\beta^2}$, on suppose que $\beta^2 = -1$. On considère alors $(1, i_A)$ une base de U et $(\beta, \beta i_A)$ qui est une base de $\beta U = \mathrm{Ker}(T-\mathrm{Id})$, ainsi comme $A = U \oplus \beta U$, on a que $(1, i_A, \beta, i_A\beta)$ est une base de A. On a

$$(i_A\beta)^2 = (i_A\beta i_A)\beta = \beta^2 = -1$$

et

$$i_A\beta(i_A\beta) = (i_A\beta)^2 = -1$$

Ainsi, on considère le morphisme d'algèbres $A \longrightarrow \mathbb{H}$ tel que

$$1 \longmapsto E, \qquad i_A \longmapsto I, \qquad \beta \longmapsto J \qquad \text{et} \qquad i_A\beta \longmapsto K$$

qui est alors un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres, car elle envoie une base sur une base. On en déduit que

$$A \simeq \mathbb{H}$$

en tant que $\mathbb{R}$-algèbres.

On en déduit que les seules $\mathbb{R}$-algèbres algébrique et sans diviseur de zéros sont isomorphes à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

25. Soit $u, v \in V$, alors comme x et y commutent, u et v aussi et on a $(u+v)^2 + (u-v)^2 = 4uv$. On en déduit donc par inégalité triangulaire et multiplicativité que :

$$4\|u\|\|v\| = 4\|uv\| \leqslant \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2$$

Ainsi, prenant u et v unitaires, on en déduit par le Théorème A, $\|\cdot\|$ restreinte à V provient d'un produit scalaire.

26. On applique le résultat précédent avec $V = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}x$. Soit y un vecteur non nul orthogonal unitaire à 1 dans V de sorte qu'on puisse écrire $x = a + by$. Afin de voir que $x^2 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x$, on montre que $y^2 = -1$.
On a $\|1+y\|^2 = \|1-y\|^2 = 2$ et donc par produit $\|1-y^2\|^2 = 4$ et donc $\langle 1, y^2 \rangle = -1$. L'angle entre 1 et y^2 dans le plan V est plat, donc $y^2 = -1$.

27. On a ainsi montré que A était algébrique. Reste à montrer que A est intègre : si $xy = 0$, alors $\|xy\| = \|x\|\|y\| = 0$ et donc $\|x\|$ ou $\|y\| = 0$ et donc x ou y est nul. D'après le théorème B, A est isomorphe à $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.