Mathématiques B MP 2023 (X)

Nguyên & Coudreuse

23 avril 2023

Je remercie F. Coudreuse pour l'aide qu'il a apporté à l'élaboration de ce corrigé.

1 Première partie

1. Par théorème du cours, si $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont deux séries entières de rayon $\geqslant \rho$, alors leur somme est de rayon $\geqslant \rho$ aussi. Ainsi, $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ est stable par somme.
Il en est de même pour $\mathcal{D}_\rho\big(M_{m,n}(\mathbb{R})\big)$ et $\mathcal{D}_\rho\big(\mathbb{R}_n[X]\big)$ car la somme se fait coefficient par coefficient.

2. Par théorème du cours, si $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont deux séries entières de rayon $\geqslant \rho$, alors leur produit de Cauchy est de rayon $\geqslant \rho$ aussi. Ainsi, $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ est stable par produit.
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux éléments de $\mathcal{D}_\rho\big(M_n(\mathbb{R})\big)$, alors
$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} f_{i,k}g_{k,j} \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$$
par propriété de sommes et produits. Ainsi, $\mathcal{D}_\rho\big(M_n(\mathbb{R})\big)$ est stable par produit.

3. L'application de restriction $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$ est linéaire. On prend donc $f \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ et on suppose que $f_{|U_r} = 0$. Comme f est développable en série entière sur U_ρ, on a
$$\forall x \in U_\rho, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
Mais comme $f_{|U_r} = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$ et donc, on a $\forall x \in U_\rho, f(x) = 0$, d'où $f = 0$.

Remarque : L'application de restriction $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$ est aussi un morphisme d'anneaux qui est injectif. L'identification de $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ à un sous-anneau de $\mathcal{D}_r(\mathbb{R})$ se fait grâce à ce morphisme.

4. Soit $f \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$. Comme $r < \rho$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$ converge et donc $\|f\|_r$ est bien défini.
   - Si $\|f\|_r = 0$, alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| r^n$ est une série à termes positifs, de somme nulle. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| r^n = 0$ et donc (a_n) est la suite nulle. D'où, $f = 0$.
   - Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\sum_n |\lambda a_n| r^n$ converge par linéarité et :
   $$\|\lambda f\|_r = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda a_n| r^n = |\lambda| \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| r^n = |\lambda| \|f\|_r$$
   - Si f (resp. g) est la somme de $\sum a_n x^n$ (resp. $\sum b_n x^n$) sur U_ρ, alors $\sum |a_n + b_n| r^n$ converge et par inégalité triangulaire :
   $$\|f + g\|_r = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n + b_n| r^n \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| r^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n| r^n = \|f\|_r + \|g\|_r$$

- On reprend les notations du points précédent, en notant $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, on sait que $\sum c_n r^n$ converge absolument par produit de Cauchy et :

$$\begin{aligned}
\|fg\|_r &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right| r^n \\
&\leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} |a_k| r^k |b_{n-k}| r^{n-k} \\
&= \|f\|_r \|g\|_r
\end{aligned}$$

5. Remarquons qu'on a pour tout $x \in [-r, r]$, $|f(x)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| r^n = \|f\|_r$ et donc $\|f\|_{\infty,[-r,r]} \leqslant \|f\|_r$, donc si $\sum \|f\|_r$ converge, alors $\sum \|f\|_{\infty,[-r,r]}$ converge aussi. Donc, $\sum f_n$ converge normalement sur $[-r, r]$, donc sur U_r. On note f sa limite.
Il s'agit de montrer que $f \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$. Ecrivons $f_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k^{(n)} x^k$ pour $x \in [-r, r]$. Alors, formellement, on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k^{(n)} x^k \right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_k^{(n)} \right) x^k
\end{aligned}$$

Sous réserve d'interversion, on a $f \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$.

Pour l'interversion, on a $\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k^{(n)}| r^k = \|f_n\|_r$ et $\sum \|f_n\|_r$ converge, on en déduit que la famille $\left(a_k^{(n)} r^k\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=0}^{N} f_n - f \right\|_r &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_k^{(n)}| r^k \\
&\leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|f_n\|_r \\
&\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

car $\sum \|f_n\|_r$ converge.

6. (a) Supposons le résultat vrai pour toutes les fonctions $f \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ telles que $f(0) = 1$. Soit $g \in D_\rho(\mathbb{R})$ tel que $g(0) \neq 0$, on pose alors $f = \frac{1}{g(0)} g$, de sorte que $f(0) = 1$.
Par hypothèse, il existe $r \in]0, \rho]$ tel que $\frac{1}{f} = \frac{g(0)}{g} \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$ et donc $\frac{1}{g(0)} \times \frac{g(0)}{g} = \frac{1}{g} \in D_r(\mathbb{R})$.
On suppose donc dans la suite sans perte de généralité que $f(0) = 1$.

   (b) On écrit le produit de Cauchy de f par g de sorte que

$$f(x)g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$$

et par unicité du développement en série entière, on a alors

$$\left\{ \begin{aligned} a_0 b_0 &= 1 \\ \forall n \geqslant 1, \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{d'où, en utilisant } a_0 = 1 \quad \left\{ \begin{aligned} b_0 &= 1 \\ \forall n \geqslant 1, b_n &= -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} \end{aligned} \right.$$

(c) La suite $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $\geqslant \rho$. On peut donc trouve $M>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}, |a_n|\rho^n \leqslant M$. Quitte à changer M, on suppose que $M\geqslant 1$, de sorte que $M\leqslant M^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, ainsi ,

$$\forall n, |a_n| \leqslant \left(\frac{M}{\rho}\right)^n$$

(d) On procède par récurrence forte sur $n\in\mathbb{N}$. Si $n=0$, $b_0=1=a_0$, d'où le résultat.
Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose que $\forall k\leqslant n, |b_k|\leqslant (2c)^k$, alors, on a

$$\begin{aligned}
|b_{n+1}| &\leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |a_k||b_{n+1-k}| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n+1} c^k (2c)^{n+1-k} \\
&= c^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} 2^{n+1-k} \\
&= c^{n+1}\sum_{k=0}^{n} 2^k \\
&= (2c)^{n+1}
\end{aligned}$$

(e) D'après la question précédente, $\sum b_n x^n$ a rayon $\geqslant 2c$. On prend $r=\min(\rho,2c)$ et g la somme de $\sum b_n x^n$ de sorte que $g\in\mathcal{D}_r(\mathbb{R})$ et par produit, on a $fg\in\mathcal{D}_r(\mathbb{R})$ et par construction, on a $fg=1$. Donc, $g=\dfrac{1}{f}\in\mathcal{D}_r(\mathbb{R})$.

7. On a déjà montré aux question 1. et 2. que $D_\rho(\mathbb{R})$ est un anneau. Soit maintenant $f,g\in\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ tel que $fg=0$. On suppose que $f\neq 0$, alors il existe $r\leqslant\rho$ tel que $\dfrac{1}{f}\in\mathcal{D}_r(\mathbb{R})$ et donc, $\dfrac{1}{f}\times(fg)=g=0$ sur U_r. Et donc, par 3., on en déduit que $g=0$ sur U_ρ. Ainsi, $D_\rho(\mathbb{R})$ est intègre.

2 Deuxième partie

8. (a) On fixe $P=\sum_{k=0}^{n} f_k X^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{n} g_k X^k$ deux éléments de $\mathcal{D}_\rho\big(\mathbb{R}_n[X]\big)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

- Si $\|P\|_{r,s}=0$, alors $\sum_{i=0}^{n}\|f_i\|_r s^i=0$ qui est aussi une somme à termes positifs, ainsi $\forall i\in[\![0,n]\!], \|f_i\|_r s^i=0$ et comme $s>0$, $\|f_i\|_r=0$ pour tout $i\in[\![0,n]\!]$. Et donc, par séparation de $\|\cdot\|_r$, on a $f_i=0$ pour tout $i\in[\![0,n]\!]$. Donc, $P=0$.
- On calcule, par homogénéité de $\|\cdot\|_r$,

$$\|\lambda P\|_{r,s}=\sum_{i=0}^{n}\|\lambda f_i\|_r s^i=|\lambda|\sum_{i=0}^{n}\|f_i\|_r s^i=|\lambda|\|P\|_{r,s}$$

- On calcule, par inégalité triangulaire de $\|\cdot\|_r$,

$$\|P+Q\|_{r,s}=\sum_{i=0}^{n}\|f_i+g_i\|_r s^i\leqslant\sum_{i=0}^{n}\|f_i\|_r s^i+\sum_{i=0}^{n}\|g_i\|_r s^i=\|P\|_{r,s}+\|Q\|_{r,s}$$

Donc, $\|\cdot\|_{r,s}$ est une norme sur $\mathcal{D}_\rho\big(\mathbb{R}_n[X]\big)$.

(b) Si $P=\sum_{k=0}^{n} f_k X^k\in\mathcal{D}\big(\mathbb{R}_n[X]\big)$ et $Q=\sum_{k=0}^{m} g_k X^k\in\mathcal{D}_\rho\big(\mathbb{R}_m[X]\big)$. Alors, par produit de Cauchy de polynômes et en utilisant le fait que $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ est un anneau, on a $PQ\in\mathcal{D}_\rho\big(\mathbb{R}_{n+m}[X]\big)$.
En fait, en utilisant l'intégrité de $D_\rho(\mathbb{R})$, on peut même être plus précis et montrer que $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$.

On suppose que $m \leqslant n$ et on pose $g_j = 0$ pour $m > n$ de sorte que $PQ = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{\ell=0}^{k} f_\ell g_{k-\ell} \right) X^k$ et on a par sous-multiplicativité de $\| \cdot \|_r$:

$$\begin{aligned} \|PQ\|_{r,s} &= \sum_{k=0}^{2n} \left\| \sum_{\ell=0}^{k} f_\ell g_{k-\ell} \right\|_r s^k \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{\ell=0}^{k} \|f_\ell\|_r \|g_{k-\ell}\|_r \right) s^k \\ &= \|P\|_{r,s} \|Q\|_{r,s} \end{aligned}$$

9. (a) On identifie naturellement $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})[X]$ avec $\mathcal{D}_\rho\big(\mathbb{R}[X]\big)$. Comme $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ est intègre, on peut appliquer le théorème de division euclidienne dans $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})[X]$. ce qui donne le résultat.

   (b) On suit l'indication et on commence par supposer que $B = X^d$. On écrit $A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $Q = \sum_{j=0}^{n-d} q_j X^j$ et $R = \sum_{j=0}^{d-1} r_j X^j$. L'égalité $A = X^d Q + R$ donne alors $a_j = \begin{cases} r_j & \text{si } 0 \leqslant j \leqslant d-1 \\ q_{j-d} & \text{si } d \leqslant j \leqslant n-1 \end{cases}$ et donc, on a

$$\|A\|_{r,s} = \|X^d Q\|_{r,s} + \|R\|_{r,s} = s^d \|Q\|_{r,s} + \|R\|_{r,s}$$

On a alors

$$\|R\|_{r,s} \leqslant \|A\|_{r,s} \qquad \text{et} \qquad \|Q\|_{r,s} \leqslant \frac{1}{s^d} \|A\|_{r,s}$$

ce qui est l'inégalité recherchée car $B = X^d$.

Dans le cas général, on écrit $C = B - X^d$ qui est de degré $d-1$. Alors,

$$A = BQ + R = QX^d + QC + R$$

ce qui s'écrit $A - QC = QX^d + R$ et donc via le cas particulier précédent, on a :

$$s^d \|Q\|_{r,s} \leqslant \|A - QC\|_{r,s} \leqslant \|A\|_{r,s} + \|Q\|_{r,s} \|C\|_{r,s}$$

et donc, on a

$$\|Q\|_{r,s} \leqslant \frac{\|A\_r,s}{s^d - \|C\|_{r,s}} = \frac{\|A\|_{r,s}}{s^d - \|B - X^d\|_{r,s}}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|R\|_{r,s} &\leqslant \|A - QC\|_{r,s} \\ &\leqslant \|A\|_{r,s} + \|Q\|_{r,s} \|C\|_{r,s} \\ &\leqslant \|A\|_{r,s} \left(1 + \frac{\|C\|_{r,s}}{s^d - \|C\|_{r,s}} \right) \\ &= \frac{s^d \|A\|_{r,s}}{s^d - \|B - X^d\|_{r,s}} \end{aligned}$$

10. On écrit la division euclidienne de P par F : $P = QF + R$. Comme $R \in \mathcal{D}_\rho\big(\mathbb{R}_{d-1}[X]\big)$ et $F \in \mathcal{D}_\rho\big(\mathbb{R}_d[X]\big)$, on en déduit que $F + R$ est de degré d, dont le coefficient dominant est celui de F qui est 1 car F est unitaire. Donc, $F + G$ est unitaire.

    D'autre part, en évaluant en $t = 0$, on a $Q_{|t=0}$ et $R_{|t=0}$ sont le quotient et le reste de la division euclidienne de $P_{|t=0} = X^n$ par $F_{|t=0} = X^d$. On en déduit que $R_{|t=0} = 0$ et donc $(F + R)_{|t=0} = F_{|t=0} = X^d$.

11. Soit $f \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$, ainsi $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par un réel $M(f)$, car la série entière est de rayon $\geqslant \rho$. Alors, on a

$$\begin{array}{rcl} \|f\|_{r,s} - |f(0)| & = & \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |a_n| r^n \\ & = & \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |a_n\rho^n| \frac{r^n}{\rho^n} \\ & \leqslant & M(f) \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{r^n}{\rho^n} \\ & = & M(f) \underbrace{\frac{\frac{r}{\rho}}{1-\frac{r}{\rho}}}_{:=g(r)} \end{array}$$

On peut étendre cette inégalité aux polynômes $F \in \mathcal{D}_\rho\big(\mathbb{R}_n[X]\big)$, en notant $M(F) = \max M(f_i)$ et on trouve

$$\|F\|_{r,s} - \big\|F_{|t=0}\big\|_s \leqslant M(F)g(r) \underbrace{\sum_{i=0}^{n} s^i}_{:=k_n(s)}$$

On a des constantes C_1, C_2 et C_3 telles que

$$\begin{array}{rcl} \alpha_0 & \leqslant & s^{-d}\big\|(F_0)_{|t=0} - X^d\big\|_s + s^{-d}C_1 g(r)k_d(s) \\ & = & C_1 g(r) s^{-d} k_{d-1}(s) \end{array}$$

et,

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon_0 & \leqslant & s^{-d}\|R_0\|_{r,s} \\ & \leqslant & s^{-d}\big\|R_{|t=0}\big\|_s + C_2 g(r) s^{-d} k_{d-1}(s) \\ & \leqslant & C_2 g(r) s^{-d} k_{d-1}(s) \end{array}$$

car $R_{|t=0}$. Et enfin,

$$\beta_0 \leqslant \big\|(Q_0)_{|t=0} - 1\big\|_s + C_3 g(r) k_{n-d}(s)$$

On a de plus $\lim\limits_{s\to 0} \big\|Q_{|t=0} - 1\big\|_s = \big|(Q_0)_{|t=0}(0) - 1\big|$. Or, on a

$$\begin{array}{rcl} f_d(0) & = & (P_{|t=0})_d \\ & = & \displaystyle\sum_{i+j=d} \big((F_0)_{|t=0}\big)_i \big((Q_0)_{|t=0}\big)_j \\ & = & \displaystyle\sum_{i+j=d} f_i(0) \big((Q_0)_{|t=0}\big)_j \\ & = & (Q_0)_{|t=0}(0) f_d(0) \end{array}$$

et comme $f_d(0) = 1$, on a $(Q_0)_{|t=0}(0) = 1$ et donc, on a

$$\lim_{s\to 0} \big\|Q_{|t=0} - 1\big\|_s = 0$$

Ainsi, on peut trouver $s > 0$ tel que $\big\|(Q_0)_{|t=0} - 1\big\|_s \leqslant \dfrac{1}{6}$. Et comme $\lim\limits_{r\to 0} g(r) = 0$, on peut trouver $r > 0$ tel que

$$C_1 g(r) s^{-d} k_{d-1}(s) \leqslant \frac{1}{6} \qquad \text{et} \qquad C_2 g(r) s^{-d} k_{d-1}(s) \leqslant \frac{1}{12}$$

Et ainsi, on a

$$\alpha_0 + 2\varepsilon_0 \leqslant \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \alpha_0 + \beta_0 \leqslant \frac{1}{3}$$

12. On a

$$\begin{array}{rcl} (Q_{i+1} - Q_i)F_{i+1} + R_{i+1} & = & Q_{i+1}F_{i+1} + R_{i+1} - Q_iF_{i+1} \\ & = & P - Q_i(F_i + R_i) \\ & = & Q_iF_i + R_i - Q_iF_i - Q_iR_i \\ & = & (1 - Q_i)R_i \end{array}$$

13. On a $F_{i+1} - X^d = F_i - X^d + R_i$ et donc

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{i+1} & = & s^{-d}\|F_{i+1} - X^d\|_{r,s} \\ & \leqslant & s^{-d}\|F_i - X^d\|_{r,s} + s^{-d}\|R_i\|_{r,s} \\ & = & \alpha_i + \varepsilon_i \end{array}$$

D'après 12., $Q_{i+1} - Q_i$ et R_{i+1} sont les quotient et reste de la division euclidienne de $(1 - Q_i)R_i$ par F_{i+1}. Ainsi, si $\alpha_{i+1} < 1$, on a $\|F_{i+1} - X^d\|_{r,s} < 1$, on peut appliquer les relation de 9*b*. et

$$\varepsilon_{i+1} = s^{-d}\|R_{i+1}\|_{r,s} \leqslant \frac{\|(1 - Q_i)R_i\|_{r,s}}{s^d - \|F_{i+1} - X^d\|_{r,s}}$$

Mais comme d'autre part, on a

$$\|(1 - Q_i)R_i\|_{r,s} \leqslant \|1 - Q_i\|_{r,s}\|R_i\|_{r,s} = s^d\beta_i\varepsilon_i$$

et donc, on a

$$\varepsilon_{i+1} \leqslant \frac{\beta_i\varepsilon_i}{1 - \alpha_i}$$

De même, la seconde inégalité donne

$$\|Q_{i+1} - Q_i\|_{r,s} \leqslant \frac{\|(1 - Q_i)R_i\|_{r,s}}{s^d - s^d\alpha_i} = \frac{\beta_i\varepsilon_i}{1 - \alpha_i}$$

Comme d'autre part, $\|Q_{i+1} - Q_i\|_{r,s} \geqslant \|Q_i - 1\|_{r,s} - \|Q_{i+1} - 1\|_{r,s}$, on a

$$\beta_{i+1} \leqslant \beta_i + \frac{\beta_i\varepsilon_i}{1 - \alpha_i}$$

14. On montre ces relations par récurrences. Pour $i = 0$, c'est trivial. Supposons que ces relations soient vraies pour $i \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{i+1} & \leqslant & \alpha_i + \varepsilon_i \\ & \leqslant & \alpha_0 + 2\varepsilon_0 - 2^{1-i}\varepsilon_0 + 2^{-i}\varepsilon_0 \\ & = & \alpha_0 + 2\varepsilon_0 - 2^{-i}\varepsilon_0 \\ & = & \alpha_0 + 2(1 - 2^{-i-1})\varepsilon_0 \end{array}$$

En particulier, $\alpha_{i+1} \leqslant \alpha_0 + 2\varepsilon_0 \leqslant \frac{1}{3} < 1$ et donc on peut appliquer les inégalités de la question précédentes et en utilisant $\alpha_i \leqslant \alpha_0 + 2\varepsilon_0 \leqslant \frac{1}{3}$ et $\beta_i \leqslant \beta_0 + \varepsilon_0 \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$:

$$\varepsilon_{i+1} \leqslant \varepsilon_i\frac{\beta_i}{1 - \alpha_i} \leqslant \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}}\varepsilon_i = \frac{1}{2}\varepsilon_i$$

Ce qui donne $\varepsilon_{i+1} \leqslant 2^{-i-1}\varepsilon_0$ et donc, on a

$$\beta_{i+1} \leqslant \beta_i\frac{\beta_i}{1 - \alpha_i}\varepsilon_i \leqslant \beta_i + 2^{-i-1}\varepsilon_0 \leqslant \beta_0 + (1 - 2^{-i})\varepsilon_0 + 2^{-i-1}\varepsilon_0 = \beta_0 + (1 - 2^{-i-1})\varepsilon_0$$

15. (a) On écrit $R_i = \sum_{j=0}^{d-1} q_j^{(i)}X^j$ et $F_i = X^d + \sum_{j=0}^{d-1} f_j^{(i)}X^j$ avec $f_j^{(i)}, q_j^{(i)} \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$. On a $F_{i+1} - F_i = R_i$, ie $q_j^{(i)} = f_j^{(i+1)} - f_j^{(i)}$ et donc

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i\in\mathbb{N}} \|q_j^{(i)}\|_r & \leqslant & \sum_{k=0}^{d-1}\sum_{i\in\mathbb{N}} \|q_j^{(i)}\|_r s^i \\ & = & \sum_{i\in\mathbb{N}} \|R_i\|_{r,s} \\ & \leqslant & \varepsilon_0 \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i} \\ & \leqslant & 2\varepsilon_0 \end{array}$$

Et donc par la question 5., $\sum_{i\in\mathbb{N}} q_j^{(i)}$ converge normalement vers une limite notée q_j, et la convergence a lieu pour $\|\cdot\|_r$.
Or $\sum_{i=0}^{n} q_j^{(i)} = f_j^{(n+1)} - f_j^{(0)}$ et donc $f_j^{(n)}$ converge pour $\|\cdot\|_r$ vers une fonction f_j.
On pose $F = X^d + \sum_{j=0}^{d-1} f_j X^j \in \mathcal{D}_r\big(\mathbb{R}_d[X]\big)$ et on a

$$\|F_n - F\|_{r,s} = \sum_{j=0}^{d-1} \|f_j^{(n)} - f_j\|_r s^j \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Et donc, (F_n) converge vers F pour la norme $\|\cdot\|_{r,s}$ et F est bien unitaire.

Enfin, par convergence de $f_j^{(n)}$ vers f_j, on a $f_j(0) = \lim_{n\to+\infty} f_j^{(n)}(0) = 0$ et donc, $F_{|t=0} = X^d$.

(b) D'après la question 13., on a $\|Q_{i+1} - Q_i\|_{r,s} \leqslant \dfrac{\beta_i}{1-\alpha_i}\varepsilon_i \leqslant \dfrac{1}{3}\varepsilon_i$ et donc, on a

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \|Q_{i+1} - Q_i\|_{r,s} \leqslant \frac{\varepsilon_0}{3}\sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i} = \frac{2\varepsilon_0}{3} < +\infty$$

Et donc, par un raisonnement analogue à la question précédente, (Q_i) converge pour $\|\cdot\|_{r,s}$ converge vers $Q \in \mathcal{D}_r\big(\mathbb{R}_{n-d}[X]\big)$. En outre, comme $\|R_i\|_{r,s} = \|F_{i+1} - F_i\|_{r,s} \longrightarrow 0$.
Dans l'égalité $P = Q_iF_i + R_i$, on trouve $P = QF$. D'où ce qu'on cherchait.

16. Soit $P \in \mathcal{D}_\rho\big(\mathbb{R}_n[X]\big)$ et λ racine de $P_{|t=0}$ de multiplicité d. Soit $Q(X) = P(X+\lambda)$.
On écrit $Q(X) = \sum_{j=0}^{n} g_j X^j$. Comme $Q_{|t=0} = Q_{|t=0}(X+\lambda) = 0$ et donc 0 est racine de Q d'ordre d. Ainsi, on a $g_0(0) = ... = g_{d-1}(0) = 0$ et $g_d(0) \neq 0$, sinon 0 serait racine d'ordre $d+1$.
Soit $\rho_1 \leqslant \rho$ tel que $g_d \neq 0$ sur U_{ρ_1}, alors il existe $\rho_2 \leqslant \rho_1$ tel que $\dfrac{1}{g_d} \in \mathcal{D}_{\rho_2}$.
On pose $\widetilde{Q} = \dfrac{1}{g_d}P \in \mathcal{D}_{\rho_2}\big(\mathbb{R}_n[X]\big)$. Alors, $\widetilde{Q}$ vérifie les conditions des questions précédentes, il existe donc $\rho_3 \leqslant \rho_2$, $F \in \mathcal{D}_{\rho_3}\big(\mathbb{R}_d[X]\big)$ unitaire et $G \in \mathcal{D}_{\rho_3}\big(\mathbb{R}_{n-d}[X]\big)$ tel que $\widetilde{Q} = FG$ et $F_{|t=0} = X^d$.
On pose $\widetilde{F}(X) = F(X-\lambda)$ et $\widetilde{G} = g_dG$, on a $P = \widetilde{F}\widetilde{G}$, $\widetilde{F}_{|t=0} = (X-\lambda)^d$ et $\widetilde{G}$ est unitaire car $P = \widetilde{F}\widetilde{G}$ l'est.

17. Par continuité de f en 0, il existe $r_1 \leqslant \rho$ tel que $f > 0$ sur U_{r_1}. Soit $P = X^2 - f \in \mathcal{D}_\rho\big(\mathbb{R}_2[X]\big)$, $\sqrt{f(0)}$ est racine d'ordre 1 de P, donc il existe $r_2 \leqslant \rho$, $F, G \in \mathcal{D}_{r_2}\big(\mathbb{R}_1[X]\big)$ unitaires tels que $P = FG$ sur U_{r_2}.
Soit $\rho_f = \min(r_1, r_2)$. On écrit $F = X - g_1$ et $G = X - g_2$ sur U_{ρ_f} avec $g_1, g_2 \in \mathcal{D}_{\rho_f}(\mathbb{R})$. Alors, par identification, $g_1 + g_2 = 0$ et $g_1g_2 = -f$ de sorte que $g_1^2 = f$ et donc $g_1 = \sqrt{f}$ sur U_{ρ_f}.

3 Troisième partie

18. $M_{|t=0}$ est symétrique réelle, donc par le théorème spectral, il admet une valeur propre réelle.

19. On a $M - \lambda I_n \in \mathcal{D}_\rho\big(M_n(\mathbb{R})\big)$. On écrit $M = (f_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $f_{i,j} \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$. Alors, $f_{i,j}(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n!} f_{i,j}^{(n)}(0)t^n$ pour $t \in U_{\rho_1}$. En particulier, $M_{|t=0} = \lambda I_n$ (car diagonalisable avec λ pour seule valeur propre) et donc $f_{i,j}(0) = \lambda\delta_{i,j}$. Ainsi, on a

$$(M - \lambda I_n)_{i,j} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{f_{i,j}^{(n)}}{n!}t^n = t\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f_{i,j}^{(n+1)}(0)}{n!}t^n}_{:=(M_0)_{i,j}(t)}$$

On a $M_0 \in \mathcal{D}_{\rho_1}\big(S_n(\mathbb{R})\big)$ et $M - \lambda I_n = tM_0$ sur U_{ρ_1}.

20. Soit $F_0 = F_{|t=0} = (X-\lambda)^d$ et $G_0 = G_{|t=0}$ et $M_0 = M_{|t=0}$ de sorte que $A_0 = F_0(M_0)$ et $B_0 = G_0(M_0)$. Alors,
$$\chi_{M_0} = F_0 G_0 = (X-\lambda)^d G_0$$
Comme λ est valeur propre d'ordre d, on en déduit que G_0 est premier avec F_0 et donc par le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, on a
$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\big((M_0 - \lambda I_d)^d\big) \oplus \mathrm{Ker}\big(G_0(M_0)\big) = \mathrm{Ker}(A_0) \oplus \mathrm{Ker}(B_0)$$
avec $\mathrm{Ker}(A_0)$ de dimension d et $\mathrm{Ker}(B_0)$ de dimension $n-d$.

On considère $(a_1, ..., a_d, b_1, ..., b_{n-d})$ une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition précédente. Soit $U \in M_{n,d}(\mathbb{R})$ la matrice de $(a_1, ..., a_d)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $V \in M_{n,n-d}(\mathbb{R})$ la matrice de $(b_1, ..., b_{n-d})$ dans la base canonique. Alors,
- $\mathrm{Im}(B_0 U) = B_0(\mathrm{Im} U) = B_0\big(\mathrm{Vect}(a_1, ..., a_d)\big) = \mathrm{Im} B_0$ car $B_0 b_i = 0$.
- De même, $\mathrm{Im}(A_0 V) = \mathrm{Im}(A_0)$ car $A_0 a_i = 0$.
- Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ avec $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in \mathbb{R}^{n-d}$ tels que $\begin{pmatrix} B_0 U & A_0 V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. Alors, $B_0 U x = 0$ et $A_0 V y = 0$. Donc, $Ux \in \mathrm{Ker}(B_0)$ et $Vy \in \mathrm{Ker}(A_0)$. Mais on a construit U à valeurs dans $\mathrm{Ker}(A_0)$ et donc $Ux \in \mathrm{Ker}(A_0) \cap \mathrm{Ker}(B_0) = 0$. Comme U est injective, on a $x = 0$. De même, on a $y = 0$. Et donc, la matrice $\begin{pmatrix} B_0 U & A_0 V \end{pmatrix}$ est inversible car injective.

21. Q est inversible à $t = 0$ et donc $\det(Q) \neq 0$ sur un voisinage U_{r_1} de 0 par continuité du déterminant. Comme $\det(Q) \in \mathcal{D}_{r_1}(\mathbb{R})$, il existe $\rho_2 \leqslant r_1$ tel que $\dfrac{1}{\det(Q)} \in \mathcal{D}_{\rho_2}(\mathbb{R})$. Enfin, la comatrice de Q est un élément de $\mathcal{D}_{\rho_2}\big(M_n(\mathbb{R})\big)$ et donc
$$Q^{-1} = \frac{1}{\det(Q)} \mathrm{Com}(Q)^T \in \mathcal{D}_{\rho_2}\big(M_n(\mathbb{R})\big)$$

22. (a) Q est bijective sur U_{ρ_2} et donc $\begin{pmatrix} B_a U & A_a V \end{pmatrix}$ est inversible pour tout $a \in U_{\rho_2}$. Comme $\begin{pmatrix} B_a U & A_a V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B_a U x + A_a V x$, on a $\mathrm{Im}(B_a U) + \mathrm{Im}(A_a V) = \mathbb{R}^n$.
En outre, si $z \in \mathrm{Im}(B_a U) \cap \mathrm{Im}(A_a V)$, on écrit $z = B_a U x = A_a V y$ pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in \mathbb{R}^{n-d}$. On a $z = \begin{pmatrix} B_a U & A_a V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_a U & A_a V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ et par injectivité, on a $x = y = 0$ et donc $z = 0$. D'où :
$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(B_a U) \oplus \mathrm{Im}(A_a V)$$

(b) On a facilement $\mathrm{Im}(B_a U) \subset \mathrm{Im}(B_a)$ et $\mathrm{Im}(A_a V) \subset \mathrm{Im}(A_a)$. En outre, $B_a A_a = A_a B_a = \big(FG(M)\big)_a = P(M)_a = \chi_{M_a}(M_a) = 0$ par le théorème Cayley-Hamilton. Ainsi, on a $\mathrm{Im}(B_a) \subset \mathrm{Ker}(A_a)$ et $\mathrm{Im}(A_a) \subset \mathrm{Ker}(B_a)$.
On a enfin, $\mathrm{rg}(B_a U) = n - \mathrm{rg}(A_a V) \geqslant n - \mathrm{rg}(A_a) = \dim\big(\mathrm{Ker}(A_a)\big)$ et donc par égalité des dimensions on a
$$\mathrm{Im}(B_a u) = \mathrm{Im}(B_a) = \mathrm{Ker}(A_a)$$
et par le même raisonnement, on a
$$\mathrm{Im}(A_a V) = \mathrm{Im}(A_a) = \mathrm{Ker}(B_a)$$

23. Soit $(e_1, ..., e_n)$ le base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $i \in [\![1, d]\!]$ et $j \in [\![1, n-d]\!]$, on pose $a_i = Q_a e_i = B_a U e_i$ et $b_j = Q_a e_{d+j} = A_a V e_{d+j}$ de sorte que $(a_1, ..., a_d, b_1, ..., b_{n-d})$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on note Q^{-1} la matrice de changement de base.
Ainsi, $Q_a^{-1} M_a Q_a$ est la matrice de l'endomorphisme canoniuqement associé à M_a vu dans la base $(a_1, ..., a_d, b_1, ..., b_{n-d})$. Or $(a_1, ..., a_d)$ est une base de $\mathrm{Im}(B_a U) = \mathrm{Ker}(A_a) = \mathrm{Ker}\big(F_a(M_a)\big)$ est stable par M_a. De même, $(b_1, ..., b_{n-d})$ est une base de $\mathrm{Im}(A_a V) = \mathrm{Ker}(B_a)$ qui est stable par M_a. Donc, dans cette base, M_a est diagonale par blocs et donc il existe M_a^1 et M_a^2 tel que $Q_a^{-1} M_a Q_a = \mathrm{diag}(M_a^1, M_a^2)$.

Les fonctions M^1 et M^2 définies sur U_{ρ_2} sont polynomiales en les coefficients de $Q^{-1} M Q$ et donc sont dans $\mathcal{D}_{\rho_2}\big(M_d(\mathbb{R})\big)$ et $\mathcal{D}_{\rho_2}\big(M_{n-d}(\mathbb{R})\big)$.

24. Comme M_a est symétrique, A_a et B_a aussi, car sont des polynômes en M_a. On en déduit donc que si $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in \mathbb{R}^{n-d}$, on a
$$\langle B_a U x, A_a V y\rangle = \langle A_a B_a U x, V y\rangle = 0$$
Car $A_a B_a = 0$ et donc la somme est bien orthogonale.

25. On pose $f^{(i)}(a) = B_a U e_i$ pour $i \in [\![1, d]\!]$ et $g^{(j)}(a) = A_a V e_{j+d}$ pour $j \in [\![1, n-d]\!]$. De sorte que $f^{(i)} \in \mathcal{D}_{\rho_2}(\mathbb{R}^d)$ et $g^{(j)} \in \mathcal{D}_{\rho_2}(\mathbb{R}^{n-d})$ et $(f^{(1)}, ..., f^{(d)})$ est une base de $\mathrm{Im}(BU)$ et $(g^{(1)}, ..., g^{(n-d)})$ une base de $\mathrm{Im}(AV)$.

On note $\widetilde{f}^{(1)}, ..., \widetilde{f}^{(d)}, \widetilde{g}^{(1)}, ..., \widetilde{g}^{(n-d)}$ une base orthogonale obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt sans renormalisation. On note S^1 la matrice de passage de f vers $\widetilde{f}$ et S^2 celle de g vers $\widetilde{g}$, alors les coefficients de S^1 et S^2 sont polynomiales en les $f^{(i)}$ et $g^{(j)}$ et donc dans $\mathcal{D}_{\rho_2}$.

Notons que $\left\|\widetilde{f}^{(i)}\right\|^2, \left\|\widetilde{g}^{(j)}\right\|^2$ sont dans $\mathcal{D}_{\rho_2}$, non nulles en 0 et en appliquant la question 17., on peut trouver ρ_3 tel que $\left\|\widetilde{f}^{(i)}\right\|, \left\|\widetilde{g}^{(j)}\right\|$ sont dans $\mathcal{D}_{\rho_3}$. Quitte à encore réduit ρ_3, leur inverse sont aussi dans $\mathcal{D}_{\rho_3}$.
Soit $R_1 = \mathrm{diag}\big(\|\widetilde{f}^{(i)}\|^{-1}\big) S^1$ et $R_2 = \mathrm{diag}\big(\|\widetilde{g}^{(j)}\|^{--1}\big) S^2$. Alors, R_1^{-1} (resp. R_2^{-1}) sont les matrices de passage de $(f^{(1)}, ..., f^{(d)})$ vers $\left(\dfrac{\widetilde{f}^{(1)}}{\|\widetilde{f}^{(1)}\|}, ..., \dfrac{\widetilde{f}^{(d)}}{\|\widetilde{f}^{(d)}\|}\right)$ (resp. idem pour les $g^{(j)}$ et les $\dfrac{\widetilde{g}^{(j)}}{\|\widetilde{g}^{(j)}\|}$).
Comme $R_1, R_2 \in \mathcal{D}_{\rho_3}$ et que $\det(R_i) \neq 0$ sur U_{ρ_3}, on utilise le même raisonnement que la question 21., on a $R_1 \in GL_d\big(\mathcal{D}_{\rho_3}(\mathbb{R})\big)$ et $R_2 \in GL_{n-d}\big(\mathcal{D}_{\rho_3}(\mathbb{R})\big)$. Alors, $Q\mathrm{diag}(R_1, R_2)$ est orthogonale comme matrice de passage d'une base orthogonale vers une autre. Alors, $P = Q\mathrm{diag}(R_1, R_2)$ est orthogonale et $P^T M P$ est diagonale par blocs.

26. Soit $M \in \mathcal{D}_\rho\big(S_n(\mathbb{R})\big)$. On raisonne par récurrence forte sur la dimension n. Si $n = 1$, c'est trivial en prenant $P = 1$.
Soit $n \geqslant 2$, on suppose le résultat vrai pour tout $k \leqslant n$. Soit λ une valeur propre de $M_{|t=0}$. On peut alors trouver $\rho_1 \leqslant \rho$ et P orthogonale telle que $P^T M P = \mathrm{diag}(M_1, M_2)$ avec M_1 et M_2 symétrique de taille strictement plus petite que n.
En appliquant l'hypothèse de récurrence, on peut trouver $\rho_2 \leqslant \rho_1$, P_1, P_2 orthogonales telles que $P_1^T M_1 P_1$ et $P_2^T M_2 P_2$ sont diagonales. Alors, si $R = P\mathrm{diag}(P_1, P_2)$ est orthogonale et on a $R^T M R$ est diagonale sur U_{ρ_2}.

Ceci conclut la preuve du théorème par récurrence.