ENS Maths C 2023 MP

un corrigé

Vous pouvez, pour me signaler toute erreur de ma part ou bien me faire part d'une manière plus simple de traiter une certaine question, me contacter par mail à l'adresse : `toky7hansen2004@gmail.com`.

Partie I – Premiers exemples

1. (a) Par hypothèse, ϕ_0 est solution globale du problème de Cauchy associé à F_0. En particulier, $F_0(\phi_0(t))$ devant exister pour tout $t \geq 0$, on a $\phi_0 > 0$ sur $[0, +\infty[$ ainsi que :

$$\begin{cases} \phi_0(0) = y_{\text{init}} & \text{(i)} \\ \forall\, t \geq 0, \quad \phi_0'(t) = F_0(\phi_0(t)) = a\phi_0(t)\ln\left(\dfrac{\theta}{\phi_0(t)}\right) & \text{(ii)} \end{cases}$$

Puisque ϕ_0 est dérivable donc continue sur $[0, +\infty[$, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\forall\, t \in [0, \varepsilon_1]$, $\left|\phi_0(t) - \phi_0(0)\right| \leq \frac{\theta - y_{\text{init}}}{2}$, quantité strictement positive. Ainsi,

$$\forall\, t \in]0, \varepsilon_1], \quad \phi_0(t) \leq \phi_0(0) + \frac{\theta - y_{\text{init}}}{2} < y_{\text{init}} + (\theta - y_{\text{init}}) = \theta$$

D'autre part, (ii) montre, F_0 étant continue par opérations usuelles sur des fonctions usuelles, que ϕ_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi, étant donné que $\phi'(0) = ay_{\text{init}}\ln\left(\frac{\theta}{y_{\text{init}}}\right) > 0$ (car $0 < y_{\text{init}} < \theta$ et $a > 0$), il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que $\forall\, t \in [0, \varepsilon_2]$, $\phi_0'(t) > 0$. Alors,

$$\forall\, t \in]0, \varepsilon_2], \quad \phi_0(t) = \phi_0(0) + \int_0^t \phi_0'(u)\,\mathrm{d}u = y_{\text{init}} + \int_0^t \phi_0'(u)\,\mathrm{d}u > y_{\text{init}}$$

puisque $t > 0$ et par positivité stricte de l'intégrale. En posant alors $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, on a bien $\forall\, t \in]0, \varepsilon], y_{\text{init}} < \phi_0(t) < \theta$.

(b) On a justifié à la question précédente la stricte positivité de ϕ_0 sur $[0, +\infty[$, ce qui nous permet de considérer la fonction :

$$z_0 : \left|\begin{array}{rcl} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{\phi_0(t)}{\theta}\right) \end{array}\right.$$

qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ par composition. Alors :

$$\forall\, t \geq 0, \quad \phi_0(t) = \theta e^{z_0(t)} \quad \text{et} \quad \phi_0'(t) = \theta z_0'(t)e^{z_0(t)}$$

donc puisque ϕ_0 est solution de (1), on a pour tout $t \geq 0$:

$$\theta z_0'(t)e^{z_0(t)} = F_0(\phi_0(t)) = a\theta e^{z_0(t)}\ln(e^{-z_0(t)}) = -a\theta z_0(t)e^{z_0(t)}$$
$$\text{soit} \quad z_0'(t) = -az_0(t)$$

D'où $\forall\, t \in [0, +\infty[$, $z_0(t) = z_0(0)e^{-at} = \ln(\frac{y_{\text{init}}}{\theta})e^{-at}$ et :

$$\phi_0(t) = \theta\exp\left(e^{-at}\ln\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right) = \theta\left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right)^{e^{-at}}$$

(c) On a alors :

$$\phi_0'(t) = -ae^{-at}\ln\left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right)\cdot\theta\exp\left(e^{-at}\ln\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right) = -a\theta\ln\left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right)e^{-at}\left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right)^{e^{-at}} > 0$$

puisque $a, \theta > 0$ et $0 < y_{\text{init}} < \theta$, i.e. $\ln(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}) < 0$. De plus :

$$\begin{cases} \phi_0(0) = y_{\text{init}} \\ \lim\limits_{t \to +\infty} \phi_0(t) = \theta \quad \text{d'après son expression établie en b)} \end{cases}$$

ϕ_0 est donc continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc par le théorème de la bijection et d'après les limites ci-dessus, elle est bijective de $[0, +\infty[$ sur $[y_{\text{init}}, \theta[$. En particulier, $\forall\, t > 0, y_{\text{init}} = \phi_0(0) < \phi_0(t) < \theta$.

2. Soit ϕ_μ la solution de (1) associée à F_μ sur $[0,+\infty[$ (dont on admet encore une fois qu'elle existe, et donc qu'elle est positive dans le cas $0<\mu<1$, ce qui justifie la suite). On pose :
$$z_\mu : \left| \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \phi_\mu(t)^{-\mu} \end{array} \right.$$
Comme précédemment, $z_\mu \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$ et :
$$\forall\, t \geq 0, \quad \phi_\mu(t) = z_\mu(t)^{-1/\mu} \quad \text{donc} \quad \phi_\mu'(t) = -\frac{1}{\mu} z_\mu(t)^{-\frac{1}{\mu}-1} z_\mu'(t)$$
D'où, pour tout $t \geq 0$,
$$-\frac{1}{\mu} z_\mu(t)^{-\frac{1}{\mu}-1} z_\mu'(t) = \frac{a}{\mu} z_\mu(t)^{-1/\mu}\left(1 - \left(\frac{z_\mu(t)^{-1/\mu}}{\theta}\right)^\mu\right)$$
$$\text{soit} \quad z_\mu'(t) = -a z_\mu(t)\left(1 - \frac{1}{\theta^\mu z_\mu(t)}\right) = -a z_\mu(t) + \frac{a}{\theta^\mu}$$
Cette équation différentielle admet entre autres $t \mapsto 1/\theta^\mu$ comme solution particulière constante, donc par linéarité, on obtient l'existence de $C \in \mathbb{R}$ telle que l'on ait $\forall\, t \geq 0$, $z_\mu(t) = Ce^{-at} + 1/\theta^\mu$. Or, $z_\mu(0) = C + 1/\theta^\mu = y_{\text{init}}^{-\mu}$, donc $C = y_{\text{init}}^{-\mu} - \theta^{-\mu}$ et :
$$\forall\, t \geq 0, \quad \phi_\mu(t) = \left(\left(y_{\text{init}}^{-\mu} - \theta^{-\mu}\right)e^{-at} + \theta^{-\mu}\right)^{-1/\mu} = \theta\left(1 + e^{-at}\left(\frac{\theta^\mu}{y_{\text{init}}^\mu} - 1\right)\right)^{-1/\mu}$$

3. (a) Soit $y \in]0,+\infty[$. Pour tout $\mu \in]0,1]$,
$$F_\mu(y) = \frac{a}{\mu} y\left(1 - \left(\frac{y}{\theta}\right)^\mu\right) = \frac{a}{\mu} y\left(1 - e^{\mu \ln(y/\theta)}\right) = ay\ln\left(\frac{\theta}{y}\right)\frac{1 - e^{\mu\ln(\theta/y)}}{\mu \ln\left(\frac{\theta}{y}\right)} \underset{\mu\to 0}{\longrightarrow} ay\ln\left(\frac{\theta}{y}\right) = F_0(y)$$
car $\frac{e^u - 1}{u} \underset{u\to 0}{\sim} 1$ et $\mu\ln(\frac{\theta}{y}) \underset{\mu\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, F_μ converge simplement vers F_0 lorsque $\mu \to 0$.

   (b) Soit $t \in [0,+\infty[$. On a, d'après la question 2. :
$$\phi_\mu(t) = \theta \exp\left(-\frac{1}{\mu}\ln\left(1 + e^{-at}\left(\frac{\theta^\mu}{y_{\text{init}}^\mu} - 1\right)\right)\right)$$
Or,
$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu}\ln\left(1 + e^{-at}\left(\frac{\theta^\mu}{y_{\text{init}}^\mu} - 1\right)\right) &\underset{\mu\to 0}{\sim} -\frac{1}{\mu}e^{-at}\left(\frac{\theta^\mu}{y_{\text{init}}^\mu} - 1\right) \qquad \text{car } \frac{\theta^\mu}{y_{\text{init}}^\mu} - 1 \underset{\mu\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ &\sim -\frac{1}{\mu}e^{-at}\left(e^{\mu\ln(\theta/y_{\text{init}})} - 1\right) \\ &\sim -\frac{1}{\mu}e^{-at}\mu\ln\left(\frac{\theta}{y_{\text{init}}}\right) \qquad \text{car } \mu\ln\left(\frac{\theta}{y_{\text{init}}}\right) \underset{\mu\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ &\sim e^{-at}\ln\left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right) \end{aligned}$$
On a donc :
$$\lim_{\mu\to 0}\phi_\mu(t) = \theta\exp\left(e^{-at}\ln\left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right)\right) = \theta\left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right)^{e^{-at}} = \phi_0(t)$$
ce qui donne la convergence simple de ϕ_μ vers ϕ_0 quand $\mu \to 0$.

Partie II - Un théorème de compacité

1. Soit $\varepsilon > 0$; prenons $r = \frac{\varepsilon}{k}$. Alors, pour toute fonction $f \in B$ et tout $x \in K$, on a :
$$\forall\, y \in B(x,r), \quad \left\|f(x) - f(y)\right\| \leq k|x-y| < kr = \varepsilon$$
On en déduit que B est bien équicontinue.

2. **($\Rightarrow$) :** Supposons $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$ relativement compacte : il existe $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$ un compact tel que $A \subset \mathcal{K}$. Alors, pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, on a en particulier $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ donc par compacité de $\mathcal{K}$ dans $\big(\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty\big)$, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{K} \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$ telles que :
$$\|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet bien une sous-suite qui converge uniformément vers une limite $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$.

   ($\Leftarrow$) : Supposons, réciproquement, que toute suite d'éléments de A admette une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$ pour $\|\cdot\|_\infty$. Montrons que $\overline{A}$, l'adhérence de A, est compacte.
   Soit $(g_N)_{N\in\mathbb{N}} \in \overline{A}^{\mathbb{N}}$: par définition, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\big(f_n^{(N)}\big)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n^{(N)} - g_N\|_\infty = 0$. Alors :
$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n_N \in \mathbb{N} \ / \quad \|f_{n_N}^{(N)} - g_N\|_\infty \leq \frac{1}{2^N}$$
   Puisque $\big(f_{n_N}^{(N)}\big)_{N\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, on peut trouver $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extractrice et $h \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$ telles que :
$$\lim_{N\to+\infty} \|f_{\varphi(N)}^{(\varphi(N))} - h\|_\infty = 0$$
   Il nous suffit de vérifier que $\big(g_{\varphi(N)}\big)_{N\in\mathbb{N}}$ converge aussi uniformément vers h, pour en conclure que $(g_N)_{N\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence (qui est bien dans $\overline{A}$ en tant que limite de $\big(f_{\varphi(N)}^{(\varphi(N))}\big)_{N\in\mathbb{N}}$). Or, c'est le cas puisque pour $N \in \mathbb{N}$, on a :
$$\|g_{\varphi(N)} - h\|_\infty \leq \|g_{\varphi(N)} - f_{n_{\varphi(N)}}^{\varphi(N)}\|_\infty + \|f_{n_{\varphi(N)}}^{\varphi(N)} - h\|_\infty \leq \frac{1}{2^{\varphi(N)}} + \|f_{n_{\varphi(N)}}^{\varphi(N)} - h\|_\infty \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   puisque, φ étant strictement croissante, $\varphi(N) \geq N$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.
   Donc, $\overline{A}$ est compacte et puisque $A \subset \overline{A}$, A est relativement compacte.

3. Montrons le résultat demandé par contraposée. On suppose donc A non équicontinue, ainsi :
$$\exists\, x_0 \in K,\ \exists\, \varepsilon_0 > 0 \text{ tels que : } \quad \forall\, r > 0,\ \exists\, f \in A \text{ et } y \in B(x_0, r) \ / \quad \|f(x_0) - f(y)\| > \varepsilon_0$$
   Fixons de tels $x_0 \in K$ et $\varepsilon_0 > 0$. En appliquant la propostion précédente à $r = \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad y_n \in B\big(x_0, \frac{1}{2^n}\big) \text{ et } \|f_n(x_0) - f_n(y_n)\| > \varepsilon_0 \quad \text{(i)}$$
   Supposons par l'absurde qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extractrice pour laquelle $\big(f_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour $\|\cdot\|_\infty$, de limite une certaine fonction $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$ (ii). Alors, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$\|f_{\varphi(n)}(x_0) - f_{\varphi(n)}(y_{\varphi(n)})\| \leq \|f_{\varphi(n)}(x_0) - f(x_0)\| + \|f(x_0) - f(y_{\varphi(n)})\| + \|f(y_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(y_{\varphi(n)})\|$$
   Par l'hypothèse (ii), il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq N_1$, $\|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$.
   De plus, f étant contiue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall\, y \in B(x_0, \eta)$, $\|f(x_0) - f(y)\| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$. Or, puisque $\big(\frac{1}{2^n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq N_2$, $\frac{1}{2^{\varphi(n)}} \leq \frac{1}{2^n} \leq \eta$ et donc $y_{\varphi(n)} \in B(x_0, \frac{1}{2^{\varphi(n)}}) \subset B(x_0, \eta)$.
   Alors,
$$\forall\, n \geq N := \max(N_1, N_2), \quad \|f_{\varphi(n)}(x_0) = f_{\varphi(n)}(y_{\varphi(n)})\| \leq 2\frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} = \varepsilon_0$$
   ce qui contredit (i).
   On a donc exhibé une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont on a montré qu'elle n'admet aucune sous-suite convergente dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$, ce qui montre, compte tenu de la question précédente, que A n'est pas relativement compacte.

4. Soit $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$ vérifiant (P1), c'est-à-dire relativement compacte. D'après la question précédente, A est équicontinue ; il reste à montrer que pour tout $x \in K$, $A(x) = \{f(x) \mid f \in A\}$ et borné.
   Considérons donc $x \in K$ et supposons par l'absurde que $A(x)$ est non borné. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in A$ telle que $\|f_n(x)\| \geq n$. Par la caractérisation de la compacité relative établie en question 2, et puisque A est relativement compacte, il existe φ une extractrice telle que $\big(f_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$.
   En notant f la limite uniforme, on a alors :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|f_{\varphi(n)}\|_\infty \leq \|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty + \|f\|_\infty$$
   avec $\big(\|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0, donc bornée.
   Ainsi, $\big(\|f_{\varphi(n)}\|_\infty\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est également bornée. Or, on a également :
$$\|f_{\varphi(n)}\|_\infty \geq \|f_{\varphi(n)}(x)\| \geq \varphi(n) \geq n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

ce qui fournit une contradiction : $A(x)$ est donc borné, donc vérifie finalement (P2).
Conclusion : on a bien (P1) $\Rightarrow$ (P2).

5. (a) Construisons par récurrence une suite d'extractrices $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall\, p \geq 0$, $\left(f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_p(n)}(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
• On a $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}} \in A(x_0)^{\mathbb{N}}$. Or, $A(x_0)$ étant borné par hypothèse puisque A vérifie (P2), il existe $r > 0$ tel que $A(x) \subset \overline{B(0,r)}$, qui est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^d$, donc compacte comme on est en dimension finie. Ainsi, $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{B(0,r)}^{\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, i.e. il existe $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\left(f_{\varphi_0(n)}(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
• Supposons la suite (φ_p) construite jusqu'au rang $q \in \mathbb{N}$. En notant $\psi_q := \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_q$, $\left(f_{\psi_q(n)}(x_{q+1})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'élements de $A(x_{q+1})$ qui est borné, donc par le même argument qu'au-dessus, il existe $\varphi_{q+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(f_{\psi_q\circ\varphi_{q+1}(n)}(x_{q+1})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On a donc construit le terme suivant.
En notant posant alors :

$$\begin{cases} \psi_0 = \varphi_0 \\ \forall\, p \geq 1, \quad \psi_p = \psi_{p-1} \circ \varphi_p \end{cases}$$

on a bien le résultat voulu.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. On pose :

$$\chi_p : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} n & \text{si } n \leq p \\ \varphi_{p+1} \circ \cdots \circ \varphi_n(n) & \text{si } n > p \end{cases} \end{array} \right.$$

Montrons que c'est bien une extractrice, c'est-à-dire qu'elle est strictement croissante. Elle l'est sur $[\![0,p]\!]$ puisqu'elle y coïncide avec $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, ainsi que sur $[\![p+1,+\infty[\![$: en effet, chaque φ_k étant strictement croissante, donc toute composée de ces fonctions également, on a

$$\begin{aligned} \forall\, n \geq p+1, \quad \chi_p(n+1) &= \varphi_{p+1} \circ \cdots \circ \varphi_n \circ \varphi_{n+1}(n+1) \\ &\geq \varphi_{p+1} \circ \cdots \circ \varphi_n(n+1) \qquad \text{car } \varphi_{n+1}(n+1) \geq n+1 \\ &> \varphi_{p+1} \circ \cdots \circ \varphi_n(n) \\ &= \chi_p(n) \end{aligned}$$

Enfin, $\chi_p(p+1) = \varphi_{p+1}(p+1) \geq p+1 > p = \chi_p(p)$.
On peut donc considérer la suite extraite $\left(f_{\psi_p\circ\chi p(n)}(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(f_{\psi_p(n)}(x_p))$, convergente d'après la question précédente. Or,

$$\forall\, n \geq p+1, \quad f_{\psi_p\circ(\chi_p(n)}(x_p) = f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_p\circ\varphi_{p+1}\circ\cdots\circ\varphi_n(n)}(x_p) = f_{\psi_n(n)}(x_p)$$

Puisque $\left(f_{\psi_p\circ\chi p(n)}(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en tant que sous-suite d'une suite convergente, $(f_{\psi_n(n)}(x_p))_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

6. (a) $\mathbb{Q} \cap K \subset \mathbb{Q}$ est dénombrable donc l'on peut considérer $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap K$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q} \cap K$ ainsi que $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} := (\theta(p))_{p\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, de sorte qu'en conservant les notations de la question 5.(b), $\left(f_{\psi_n(n)}(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admette pour tout $p \in \mathbb{N}$ une limite que l'on note $f(p)$. Ainsi,

$$\forall\, y \in \mathbb{Q} \cap K, \quad \lim_{n\to+\infty} f_{\psi_n(n)}(y) = \lim_{n\to+\infty} f_{\psi_n(n)}(x_{\theta^{-1}(y)}) = f(\theta^{-1}(x))$$

ce qui montre que l'extraction $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} := (f_{\psi_n}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{Q} \cap K$.

(b) Si $x \in \mathbb{Q} \cap K$, la question précédente montre que la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $g(x) \in \mathbb{R}^d$, qui est alors son unique valeur d'adhérence. Traitons maintenant le cas où $x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap K$.
On a, puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ initialement considérée est une suite d'éléments de A, $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in A(x)^{\mathbb{N}}$, donc c'est une suite bornée dans l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^d$. Comme déjà précisé en 5.(a), elle admet alors une valeur d'adhérence $\ell \in \mathbb{R}^d$ associée à une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, d'où l'existence.
Pour l'unicité, supposons que $\ell' \in \mathbb{R}^d$ soit une autre valeur d'adhérence de $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et notons $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extractrice correspondante. Montrons que $\ell' = \ell$: soit $\varepsilon > 0$.
Comme A est équicontinue, en particulier équicontinue en x, il existe $r > 0$ tel que $\forall\, f \in A, \forall\, y \in B(x,r) \cap K$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Par densité de $\mathbb{Q} \cap K$ dans K, il existe $y_0 \in \mathbb{Q} \cap K$ tel que $|x - y_0| < r$, i.e. $y_0 \in B(x,r)$.
D'autre part, comme $y_0 \in \mathbb{Q} \cap K$, $g_n(y_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(y_0)$ et il en est de même pour ses suites extraites, d'où :

$$\exists\, N_1 \in \mathbb{N} \;/\quad \forall\, n \geq N_1, \quad \|g_{\varphi(n)}(y_0) - g(y_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$
$$\exists\, N_2 \in \mathbb{N} \;/\quad \forall\, n \geq N_2, \quad \|g_{\psi(n)}(y_0) - g(y_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

On a alors, pour tout $n \geq N = \max(N_1, N_2)$,

$$\begin{aligned}
\|g_{\varphi(n)}(x) - g_{\psi(n)}(x)\| &\leq \|g_{\varphi(n)}(x) - g_{\varphi(n)}(y_0)\| + \|g_{\varphi(n)}(y_0) - g(y_0)\| \\
&\quad + \|g(y_0) - g_{\psi(n)}(y_0)\| + \|g_{\psi(n)}(y_0) - g_{\psi(n)}(x)\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{car } g_{\varphi(n)}, g_{\psi(n)} \in A \text{ et } y_0 \in B(x,r) \cap K \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} g_{\varphi(n)}(x) - g_{\psi(n)}(x) = \ell - \ell' = 0$, soit $\ell' = \ell$.
Donc, pour tout $x \in K$, $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence $g(x)$; comme c'est une suite d'éléments de $A(x)$, donc bornée i.e. à valeurs dans un compact, et qu'elle a une unique valeur d'adhérence, elle converge vers cette valeur d'adhérence. D'où la convergence simple de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers g sur K.

7. (a) Soit $a \in K$, montrons que g est continue en a. Pour $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\|g(x) - g(a)\| \leq \|g(x) - g_n(x)\| + \|g_n(x) - g_n(a)\| + \|g_n(a) - g(a)\|$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Comme A est équicontinue en a, il existe $r > 0$ tel que $\forall\, x \in B(a,r)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\|g_n(x) - g_n(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ (puisque $g_n \in A$). D'autre part, la convergence simple de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers g sur K donne l'existence, pour tout $x \in K$, d'un rang $N_x \in \mathbb{N}$ à partir duquel $\|g(x) - g_n(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
Ainsi, pour tout $x \in K$ vérifiant $|x - a| < r$, en notant $\widetilde{N}_x := \max(N_x, N_a)$,

$$\begin{aligned}
\|g(x) - g(a)\| &\leq \|g(x) - g_{\widetilde{N}_x}(x)\| + \|g_{\widetilde{N}_x}(x) - g_{\widetilde{N}_x}(a)\| + \|g_{\widetilde{N}_x}(a) - g(a)\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

ce qui montre la continuité de g en a, ceci pour tout $a \in K$. g est alors continue sur K.

(b) Supposons par l'absurde que la convergence de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniforme. Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que :

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geq N \text{ et } x \in K \ / \quad \|g_n(x) - g(x)\| > \varepsilon_0$$

Cela permet de construire une suite d'indices $(n_N)_{N\in\mathbb{N}}$ que l'on peut prendre strictement croissante (quitte à considérer, $(n_N)_{0\leq N\leq N_0}$ étant construite, $n_{N_0+1} \geq \widetilde{N} := \max(N_0+1, n_{N_0}+1)$ dans la proposition ci-dessus), ainsi qu'une suite $(x_N)_{N\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \|g_{n_N}(x_N) - g(x_N)\| > \varepsilon_0 \quad \text{(i)}$$

Comme $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments d'un compact, elle admet une suite extraite $(x_{\theta(N)})_{N\in\mathbb{N}}$ convergente dans K, dont on note $\ell \in K$ la limite. On a alors :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \|g_{n_{\theta(N)}}(x_{\theta(N)}) - g(x_{\theta(N)})\| \leq \|g_{n_{\theta(N)}}(x_{\theta(N)}) - g_{n_{\theta(N)}}(\ell)\| + \|g_{n_{\theta(N)}}(\ell) - g(\ell)\| + \|g(\ell) - g(x_{\theta(N)})\|$$

Puisque A est équicontinue en ℓ, il existe $r > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, y \in B(\ell, r) \cap K$, $\|g_{n_{\theta(N)}}(y) - g_{n_{\theta(N)}}(\ell)\| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$ et puisque $x_{\theta(N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, N \geq N_1$, $|x_{\theta(N)} - \ell| < r$.
Ensuite, puisque $\left(g_{n_{\theta(N)}}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g sur K (car pour tout $x \in K$, $\left(g_{n_{\theta(N)}}(x)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et que celle-ci tend vers $g(x)$), il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, N \geq N_2$, $\|g_{n_{\theta(N)}}(\ell) - g(\ell)\| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$.
Enfin, par continuité de g, $\lim\limits_{N\to+\infty} g(x_{\theta(N)}) = g(\ell)$ donc on peut trouver $N_3 \in \mathbb{N}$ à partir duquel l'on a $\|g(x_{\theta(N)}) - g(\ell)\| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$.
D'où :

$$\forall\, N \geq \max(N_1, N_2, N_3), \quad \|g_{n_{\theta(N)}}(x_{\theta(N)}) - g(x_{\theta(N)})\| \leq \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} = \varepsilon_0$$

ce qui contredit (i).
On en déduit que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur K.

(c) Les questions précédentes montrent ainsi que si $A \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^d)$ vérifie (P2), c'est-à-dire est équicontinue et telle que $A(x)$ est bornée pour tout $x \in K$, alors de toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, on peut exhiber une sous-suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme au-dessus qui converge uniformément (7.(b)) vers une fonction g qui est continue sur K (7.(a)). D'après la question 2., cela équivaut exactement à dire que A est relativement compacte, ce qui achève de montrer l'implication (P2) $\Rightarrow$ (P1).

Partie III - Existence de solutions

1. Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant y_{init}, il existe $r > 0$ tel que $B_r = \overline{B(y_{\text{init}}, r)} \subset \Omega$.
D'autre part, F est continue sur Ω par hypothèse, donc sur B_r, et comme celui-ci est un compact en tant que fermé borné en dimension finie, $F(B_r)$ est aussi compact dans $\mathbb{R}^d$. En particulier, cet ensemble est borné, ce qui assure l'existence d'un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall\, y \in B_r, \quad \|F(y)\| \leq M$$

Prenons alors $T > 0$ de sorte que $T \leq \frac{r}{M}$, (ce qui est possible car $r, M > 0$ donc $\frac{r}{M}$ aussi). Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Montrons par récurrence finie sur $n \in [\![0, N]\!]$ la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \text{“on peut définir } (y_k)_{k\in[\![0,n]\!]} \in B_{nr/N}^{n+1} \text{ vérifiant : } \begin{cases} y_0 = y_{\text{init}} \\ \forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\ y_{k+1} = y_k + \Delta t F(y_k) \end{cases} \text{”}$$

• Pour avoir $\mathcal{P}(0)$, il suffit de poser $y_0 = y_{\text{init}} \in B_0 = B_{0\cdot r/N}$, la seconde propriété étant alors triviale.
• Soit $n \in [\![0, N-1]\!]$; on suppose $\mathcal{P}(n)$. Alors, en notant $(y_k)_{k\in[\![0,n]\!]} \in B_{nr/N}^{n+1}$ la suite considérée, on peut poser, puisque $y_n \in B_{nr/N} \subset B_r \subset \Omega$, $y_{n+1} := y_n + \Delta t F(y_n)$. Alors :

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - y_{\text{init}}\| &\leq \|y_{n+1} - y_n\| + \|y_n - y_{\text{init}}| \\ &\leq \Delta t\|F(y_n\| + \frac{nr}{N} \\ &\leq \frac{T}{N}M + \frac{nr}{N} \quad \text{car } y_n \in B_r \\ &\leq \frac{r}{N} + \frac{nr}{N} \quad \text{par choix de } T \\ &\leq \frac{(n+1)r}{N} \end{aligned}$$

c'est-à-dire $y_{n+1} \in B_{(n+1)r/N}$, et on a toujours $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $y_k \in B_{nr/N} \subset B_{(n+1)r/N}$ et $y_{k+1} = y_k + \Delta t F(y_k)$, ainsi que $y_0 = y_{\text{init}}$. On obtient donc $\mathcal{P}(n+1)$.
En particullier, d'après $\mathcal{P}(N)$,

$$\exists\, (y_n)_{n\in[\![0,N]\!]} \in B_r^{N+1} \ / \quad \begin{cases} y_0 = y_{\text{init}} \\ \forall\, n \in [\![0, n-1]\!],\ y_{n+1} = y_n + \Delta t F(y_n) \end{cases} \qquad \text{ceci pour tout } N \in \mathbb{N}^*$$

On a donc bien pu choisir $r > 0$ et $T > 0$ convenables.

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction $\phi_N : [0, T] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall\, n \in [\![0, N-1]\!],\ \forall\, t \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t], \quad \phi_N(t) = (t - n\Delta t)\dfrac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} + y_n \\ \phi_N(N\Delta t) = \phi_N(T) = y_N \end{cases}$$

Vérifions que cette fonction répond au problème :
– Elle est bien affine sur chaque $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$: en effet, pour $n \in [\![0, N-1]\!]$, elle l'est sur $[n\Delta t, (n+1)\Delta t[$ et son expression sur cet intervalle est prolongée prolongée par $\phi_N((n+1)\Delta t) = y_{n+1} = \frac{y_{n+1}-y_n}{\Delta t}((n+1)\Delta t - n\Delta t) + y_n$ (i).
– Elle est ainsi continue sur chaque $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ (car affine), donc sur $\bigcup_{n=0}^{N-1}[n\Delta t, (n+1)\Delta t] = [0, T]$.
– Il est clair d'après l'expression de ϕ_N que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, $\phi_N(n\Delta t) = y_n$.
Vérifions ensuite qu'elle est unique. Si ψ_N est une autre telle fonction, alors pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^d$ tels que :

$$\forall\, t \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t], \quad \psi_N(t) = t\alpha + \beta$$

avec :

$$\begin{cases} \psi_N(n\Delta t) = n\Delta t\alpha + \beta = y_n \quad \text{(ii)} \\ \psi_N((n+1)\Delta t) = (n+1)\Delta t\alpha + \beta = y_{n+1} \quad \text{(iii)} \end{cases}$$

donc puisque le déterminant de ce système est $\begin{vmatrix} n\Delta t & 1 \\ (n+1)\Delta t & 1 \end{vmatrix} = -\Delta t \neq 0$ et que les coefficients pour ϕ_N conviennent (d'après son expression pour (ii), et d'après (i) pour (iii)), on en déduit que ϕ_N et ψ_N coïncident sur $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ (on peut, pour s'en convaincre, se ramener au cas connu de plusieurs systèmes linéaires à inconnues réelles en décomposant α et β dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$.
Donc, $\psi_N = \psi_N$ sur $[0, T]$, d'où l'unicité.

3. Montrons que $A := \{\phi_N \mid N \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$ vérifie la propriété (P1), ce qui nous permettra d'utiliser le théorème 1 puisque $[0,T]$ est un compact de $\mathbb{R}$.
Soit $x \in [0,T]$: il existe $n \in [\![0, N-1]\!]$ tel que $x \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t]$. Considérons $y \in [0,T]$ et notons m un entier de $[\![0, N-1]\!]$ tel que $y \in [m\Delta t, (m+1)\Delta t]$. Alors, en notant $\mu := \max\limits_{i\in[\![0,N-1]\!]} \|y_{i+1} - y_i\|$, on distingue plusieurs cas :
– si $m > n$ (en particulier, $y \geq x$),

$$\begin{aligned}
\|\phi_N(x) - \phi_N(y)\| &\leq \|\phi_N(y) - \phi_N(m\Delta t)\| + \sum_{k=n+1}^{m-1} \|\phi_N((k+1)\Delta t) - \phi_N(k\Delta t)\| + \|\phi_N((n+1)\Delta t) - \phi_N(x)\| \\
&\leq \left\|(y - m\Delta t)\frac{y_{m+1} - y_m}{\Delta t}\right\| + \sum_{k=n+1}^{m-1} \|y_{k+1} - y_k\| + \left\|y_{n+1} - y_n - (x - n\Delta t)\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t}\right\| \\
&\leq (y - m\Delta t)\frac{\|y_{m+1} - y_m\|}{\Delta t} + \sum_{k=n+1}^{m-1} ((k+1)\Delta t - k\Delta t)\frac{\|y_{k+1} - y_k\|}{\Delta t} + ((n+1)\Delta t - x)\frac{\|y_{n+1} - y_n\|}{\Delta t} \\
&\leq \frac{\mu}{\Delta t}\left(y - m\Delta t + \sum_{k=n+1}^{m-1} \big((k+1)\Delta t - k\Delta t\big) + (n+1)\Delta t - x\right) \\
&\leq \frac{\mu}{\Delta t}(y - x) \quad \text{par télescopage (encore valable lorsque la somme est vide, i.e. pour } m = n+1\text{)}
\end{aligned}$$

– si $m < n$ (auquel cas $y \leq x$), échanger les rôles de x et y dans les calculs précédents donne :

$$\|\phi_N(x) - \phi_N(y)\| \leq \frac{\mu}{\Delta t}(x - y)$$

– si $m = n$, on a :

$$\|\phi_N(x) - \phi_N(y)\| = \left\|\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t}\right\| |x - y| \leq \frac{\mu}{\Delta t}|y - x|$$

Or, $\forall\, i \in [\![0, N-1]\!]$, $\|y_{i+1} - y_i\| = \Delta t\|F(y_i)\| \leq \Delta t M$ donc $\frac{\mu}{\Delta t} \leq M$.
On a donc montré que toutes les fonctions ϕ_N, pour $N \in \mathbb{N}^*$, sont M-lipschitziennes. La question 1 permet alors d'en déduire que $\{\phi_N \mid N \in \mathbb{N}^*\}$ est équicontinue sur $[0,T]$.
De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$ et tout $t \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t]$,

$$\phi_N(t) = (t - n\Delta t)\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} + y_n = \left(\frac{t - n\Delta t}{\Delta t}\right) y_{n+1} + \left(1 - \frac{t - n\Delta t}{\Delta t}\right) y_n \in B_r$$

car il s'agit d'une combinaison linéaire convexe de $y_n, y_{n+1} \in B_r$ et que les boules sont convexes.
On a donc, pour tout $x \in [0,T]$, $\{\phi_N(x) \mid N \in \mathbb{N}^*\} \subset B_r$, i.e. $A(x)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^d$.
A vérifie donc (P1), c'est-à-dire (P2) d'après le théorème 1 : on en déduit que $\{\phi_N \mid N \in \mathbb{N}\}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$, et donc que $(\phi_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$, qui en est une suite, admet une sous-suite $(\phi_{\sigma(N)})_{N\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur $[0,T]$ vers une fonction $\phi \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$.

4. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$\psi_N : \left|\begin{array}{ccl} [0,T] & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ t & \longmapsto & \begin{cases} y_n & \text{si } t \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t[\\ y_N & \text{si } t = T = N\Delta t \end{cases} \end{array}\right.$$

On a bien $\forall\, N \in \mathbb{N}^*$, $\psi_N \in \mathrm{Esc}([0,T],\mathbb{R}^d)$ et elles sont à valeurs dans $B_r \subset \Omega$, ce qui permet de considérer les fonctions $F \circ \psi_N$. De plus, $\forall\, n \in [\![0, N]\!]$, $\psi_N(n\Delta t) = y_n = \phi_N(n\Delta t)$.
Il reste à vérifier la dernière propriété ; soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,T]$. Il existe $n \in [\![0, N-1]\!]$ tel que $t \in [n\Delta t, (n+1)\Delta t]$. Alors,

$$\begin{aligned}
y_{\text{init}} + \int_0^t F(\psi_N(s))\,\mathrm{d}s &= y_{\text{init}} + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} F(\psi_N(s))\,\mathrm{d}s + \int_{n\Delta t}^{t} F(\psi_N(s))\,\mathrm{d}s \\
&= y_{\text{init}} + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t F(y_k) + (t - n\Delta t)F(y_n) \\
&= (y_0 + \Delta t F(y_0)) + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta t F(y_k) + (t - n\Delta t)F(y_n) \\
&= (y_1 + \Delta t F(y_1)) + \sum_{k=2}^{n-1} \Delta t F(y_k) + (t - n\Delta t)F(y_n)
\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned}
y_{\text{init}} + \int_0^t F(\psi_N(s))\,\mathrm{d}s = \ldots &= (y_{n-1} + F(y_{n-1})) + (t - n\Delta t)F(y_n) \\
&= y_n + (t - n\Delta t)F(y_n) \\
&= (t - n\Delta t)\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} + y_n \\
&= \phi_N(t)
\end{aligned}$$

D'où l'existence (ainsi que l'expression explicite) d'une suite de fonctions $(\psi_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ telle que recherchée.

5. Notons toujours $\sigma \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{N}^*)$ une extractrice telle que $(\phi_{\sigma(N)})_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers ϕ sur $[0, T]$, ainsi que $M > 0$ un majorant de $\|F\|$ sur B_r. Montrons que $(\psi_{\sigma(N)})_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge également uniformément vers ϕ sur $[0, T]$.
Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, T[$, en notant $n_t \in [\![0, \sigma(N) - 1]\!]$ l'unique entier tel que $t \in [n_t\Delta t, (n_t + 1)\Delta t[$,

$$\begin{aligned}
\|\phi(t) - \psi_{\sigma(N)}(t)\| &\le \|\phi(t) - \phi_{\sigma(N)}(t)\| + \|\phi_{\sigma(N)}(t) - \psi_{\sigma(N)}(t)\| \\
&\le \|\phi(t) - \phi_{\sigma(N)}(t)\| + \left\|(t - n_t\Delta t)\frac{y_{n_t+1} - y_{n_t}}{\Delta t}\right\| \\
&\le \|\phi(t) - \phi_{\sigma(N)}(t)\| + \|y_{n_t+1} - y_{n_t}\| \quad \text{car } |t - n_t\Delta t| \le 1 \\
&\le \|\phi - \phi_{\sigma(N)}\|_\infty + \Delta t M \\
&\le \|\phi - \phi_{\sigma(N)}\|_\infty + \frac{TM}{\sigma(N)}
\end{aligned}$$

et cela reste vrai pour $t = T$ puisque, comme $\psi_{\sigma(N)}(\sigma(N)\Delta t) = \phi_{\sigma(N)}(\sigma(N)\Delta t)$, on a :

$$\|\phi(T) - \psi_{\sigma(N)}(T)\| \le \|\phi(T) - \phi_{\sigma(N)}(T)\| + \|\phi_{\sigma(N)}(T) - \psi_{\sigma(N)}(T)\| \le \|\phi - \phi_{\sigma(N)}\|_\infty$$

Donc, $\|\phi - \psi_{\sigma(N)}\| \le \|\phi - \phi_{\sigma(N)}\|_\infty + \frac{TM}{\sigma(N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui démontre le résultat annoncé.

6. Montrons que (ϕ, T) est solution du problème de Cauchy (1).
Comme $(\psi_{\sigma(N)})_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge en particulier simplement vers ϕ sur $[0, T]$ d'après la question précédente, la suite de fonctions $(F \circ \psi_{\sigma(N)})_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $F \circ \phi$ sur $[0, T]$ (par composition de limites pour chaque $t \in [0, T]$, cette dernière fonction étant bien définie puisque B_r est fermée, ce qui entraîne que ϕ est à valeurs dans B_r en tant que limite simple de $(\psi_{\sigma(N)})_{N\in\mathbb{N}^*}$ et de $(\phi_{\sigma(N)})_{N\in\mathbb{N}^*}$).
Soit $t \in [0, T]$. Pour $i \in [\![1, d]\!]$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on note $\left(F \circ \psi_{\sigma(N)}\right)_i$ la i-ième application coordonnée de $F \circ \psi_{\sigma(N)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Alors, pour tout $i \in [\![1, d]\!]$:
– F étant continue sur $\mathrm{Im}(\psi_{\sigma(N)}) \subset B_r \subset \Omega$, $F \circ \psi_{\sigma(N)}$ est continue par morceaux sur $[0, T]$, donc $\left(F \circ \psi_{\sigma(N)}\right)_i$ aussi.
– $\left(\left(F \circ \psi_{\sigma(N)}\right)_i\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, T]$ vers $(F \circ \phi)_i$ (d'après l'équivalence entre la convergence d'une suite d'éléments et celle des suites de coordonnées dans une base, dans un e.v.n de dimension finie).
– On a, en notant $\|\cdot\|_{\infty,\text{bc}}$ la norme infinie dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$ ainsi que $C > 0$ une constante telle que $\|\cdot\|_{\infty,\text{bc}} \le C\|\cdot\|$ (qui existe par équivalence des normes en dimension finie) :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, u \in [0, t], \quad |(F \circ \psi_{\sigma(N)})_i(u)| \le \|F \circ \psi_{\sigma(N)}(u)\|_{\infty,\text{bc}} \le C\|F \circ \psi_{\sigma(N)}(u)\| \le CM$$

avec $u \mapsto CM$ qui est intégrable sur le segment $[0, t]$.
Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^t \left(F \circ \psi_{\sigma(N)}\right)_i(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t (F \circ \phi)_i(s)\,\mathrm{d}s$$

puis, en notant $(e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$,

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^t F(\psi_{\sigma(N)})(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^d \left(\int_0^t \left(F \circ \psi_{\sigma(N)}\right)_i(s)\,\mathrm{d}s\right) e_i$$

donc :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^t F(\psi_{\sigma(N)}(s))\,\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^d \left(\lim_{N\to+\infty} \int_0^t \left(F \circ \psi_{\sigma(N)}\right)_i(s)\,\mathrm{d}s\right) e_i = \sum_{i=1}^d \left(\int_0^t (F \circ \phi)_i(s)\,\mathrm{d}s\right) e_i = \int_0^t F(\phi(s))\,\mathrm{d}s$$

D'autre part, $\lim_{N\to+\infty} \phi_{\sigma(N)}(t) = \phi(t)$ d'après la question 3, donc en passant à la limite dans l'égalité de la question 5 lorsque $N \to +\infty$,

$$\phi(t) = y_{\text{init}} + \int_0^t F(\phi(s))\,\mathrm{d}s$$

et ce, pour tout $t \in [0, T]$.
$F \circ \phi$ étant continue sur $[0, T]$ par composition, cela montre que $\phi \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^d)$ avec $\phi([0, T] \subset B_r \subset \Omega$ et :

$$\begin{cases} \forall\, t \in [0, T], \quad \phi'(t) = F(\phi(t)) \\ \phi(0) = y_{\text{init}} \end{cases}$$

(ϕ, T) est donc effectivement solution de (1), ce qui démontre le théorème 2 puisque F a été supposée continue (et quelconque) en début de partie.

7. Pour $\alpha \geq 0$, on définit la fonction :

$$\phi_\alpha : \left| \begin{array}{ccl} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \alpha] \\ (t-\alpha)^3 & \text{si } t > \alpha \end{cases} \end{array} \right.$$

Vérifions que pour tout $\alpha \geq 0$, cette fonction est solution de (1) pour $F : y \mapsto 3|y|^{2/3}$. On vérifie que ϕ_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, avec :

$$\forall\, t \geq 0, \quad \phi_\alpha'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \alpha \\ 3(t-\alpha)^2 & \text{si } t > \alpha \end{cases}$$

D'autre part, pour tout $t \in [0, \alpha]$, $F(\phi_\alpha(t)) = 0$ et pour $t \in [\alpha, +\infty[$, $F(\phi_\alpha(t)) = 3|(t-\alpha)^3|^{\frac{2}{3}} = 3(t-\alpha)^2$, donc on a bien $\phi_\alpha' = F \circ \phi_\alpha$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi, chaque ϕ_α est solution globale, ce qui montre que le problème de Cauchy associé à F admet bien une infinité de solutions.

Partie IV - Inclusions différentielles

1. Supposons que pour toute partie compacte $K \subset \mathbb{R}^d$, il existe $C_K > 0$ telle que $\mathcal{F}$ vérifie (3). Soient (ϕ, T) et (ψ, T') deux solutions maximales dont on suppose, sans perte de généralité, qu'elles vérifient $T \leq T'$.
Soit $\alpha \in]0, T[$; montrons que ϕ et ψ sont égales sur $[0, T-\alpha]$. Elles sont continues sur ce compact de $\mathbb{R}$, donc l'envoient sur un compact, de sorte que $K_\alpha := \phi([0, T-\alpha]) \cup \psi([0, T-\alpha])$ est compacte.
Ainsi, il existe d'après l'hypothèse (3) $C_\alpha > 0$ telle que :

$$\forall\,(x, y) \in K_\alpha^2,\ \forall\,(v_x, v_y) \in \mathcal{F}(x) \times \mathcal{F}(y), \quad \langle v_x - v_y, x - y \rangle \leq \|x-y\|^2$$

Soit $(t_0, \ldots, t_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ avec $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_N = T - \alpha$ une subdivision de $[0, T-\alpha]$ ϕ' et ψ'-admissible. On définit la fonction z, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, T-\alpha]$, et telle que $(t_0, \ldots, t_N)$ soit z'-admissible (par opérations usuelles et par bilinéarité du produit scalaire), par :

$$\forall\, t \in [0, T-\alpha], \quad z(t) = \|\phi(t) - \psi(t)\|^2 = \langle (\phi-\psi)(t), (\phi-\psi)(t) \rangle \geq 0$$

ce qui donne :

$$\forall\, t \in [0, T-\alpha] \backslash \{t_i, i \in [\![0, N]\!]\}, \quad z'(t) = 2\left\langle (\phi-\psi)(t), (\phi-\psi)'(t) \right\rangle$$

Puisque ϕ et ψ sont solutions de (2) sur $[0, T-\alpha]$ et à valeurs dans K_α, on a pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$ et tout $t \in]t_i, t_{i+1}[$,

$$\begin{cases} \phi'(t) \in \mathcal{F}(\phi(t)) \\ \psi'(t) \in \mathcal{F}(\psi(t)) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \left\langle \phi'(t) - \psi'(t), \phi(t) - \psi(t) \right\rangle \leq C_\alpha \|\phi(t) - \psi(t)\|^2$$

$$\text{soit} \quad \frac{1}{2} z'(t) \leq C_\alpha z(t)$$

$$\text{i.e.} \quad e^{-2C_\alpha t}(z'(t) - 2C_\alpha z(t)) \leq 0$$

Ainsi, pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$, l'intégrale ci-dessous étant définie et faussement impropre car ϕ' et ψ', donc z', admettent des limites finies à droite de t_i et à gauche de t_{i+1} (et sont continues sur $]t_i, t_{i+1}[$) :

$$e^{-2C_\alpha t} z(t) - e^{-2C_\alpha t_i} z(t_i) = \int_{t_i}^t e^{-2C_\alpha u}(z'(u) - 2C_\alpha z(u))\,\mathrm{d}u \leq \int_{t_i}^t 0\,\mathrm{d}u = 0$$

$$\text{soit} \quad e^{-2C_\alpha t} z(t) \leq e^{-2C_\alpha t_i} z(t_i) \quad \text{(i)}$$

En particlier, en l'appliquant aux $t = t_{i+1}$, on a :

$$0 \leq e^{-2C_\alpha t_N} z(t_N) \leq \cdots \leq e^{-2C_\alpha t_1} z(t_1) \leq e^{-2C_\alpha t_0} z(t_0) = z(0) = \|\phi(0) - \psi(0)\|^2 = \|y_{\text{init}} - y_{\text{init}}\|^2 = 0$$

donc chaque $z(t_i)$ est nul, puis en reportant dans (i), on en déduit finalement que z est nulle, c'est-à-dire $\phi = \psi$, sur $[0, T - \alpha]$.
Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, on en déduit que $\phi = \psi$ sur $[0, T[$. Ensuite, de cette égalité on obtient $T' = T$: en effet, si ce n'était pas le cas, i.e. si on avait $T < T'$, alors (ϕ, T) ne serait pas maximale puisqu'on pourrait la prolonger en (ψ, T').
Conclusion : $(\phi, T) = (\psi, T')$ et (2) admet bien au plus une solution maximale.

2. (a) Soient $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ainsi que :

$$\begin{cases} v_x = (a, b) \in \mathcal{F}(x) \\ v_y = (c, d) \in \mathcal{F}(y) \end{cases}$$

Quitte à échanger x et y, on peut supposer $x_1 \geq y_1$. Puisque $\operatorname{Im} \mathcal{F} \subset [v_1^+, v_1^-] \times [v_2^+, v_2^-] = [-1, 1] \times \{2\}$, on a $b = d = 2$ et $a, c \in [-1, 1]$. Alors,

$$\begin{aligned} \langle v_x - v_y, x - y \rangle &= \langle (a - c, b - d), (x_1 - y_1, x_2 - y_2) \rangle \\ &= (x_1 - y_1)(a - c) + (x_2 - y_2)(b - d) \\ &= (x_1 - y_1)(a - c) \end{aligned}$$

On distingue plusieurs cas :
– Si $x_1 < 0$, alors $y_1 < 0$ aussi et $v_x = v_y = v^-$, donc $\langle v_x - v_y, x - y \rangle = 0$.
– Si $x_1 > 0$, alors $v_x = v^+ = (-1, 2)$ et $\langle v_x - v_y, x - y \rangle = (x_1 - y_1)(-1 - c) \leq 0$ car $c \geq -1$.
– Si $x_1 = 0$ et $y_1 = 0$, alors $\langle v_x - v_y, x - y \rangle = 0$ car $x_1 = y_1$.
– Si $x_1 = 0$ et $y_1 < 0$, alors $v_y = v^- = (1, 2)$ et $\langle v_x - v_y, x - y \rangle = (x_1 - y_1)(a - 1) \leq 0$ car $a \leq 1$.
On a donc dans tous les cas $\langle v_x - v_y, x - y \leq 0 \leq \|x - y\|^2 \rangle$, donc la constante $C = 1$ convient indépendamment du compact de $\mathbb{R}^2$ considéré. $\mathcal{F}$ vérifie donc (3).
La question 1 assure alors l'unicité de la solution au problème d'inclusion différentielle (2) pour tout $y_{\text{init}} \in \mathbb{R}^2$.

(b) Posons :

$$\phi_1 : \left| \begin{array}{rcl} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & t(0, 2) \end{array} \right.$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \phi_1(0) = (0, 0) = y_{\text{init}} \\ \forall t \geq 0, \quad \phi_1'(t) = (0, 2) \in [-1, 1] \times \{2\} = \mathcal{F}(t(0, 2)) = \mathcal{F}(\phi_1(t)) \end{cases}$$

donc elle est solution globale, a fortiori maximale. Puisque toute solution maximale éventuelle est unique, ϕ_1 est l'unique solution maximale du problème (2) pour $y_{\text{init}} = (0, 0)$.

(c) Posons ensuite :

$$\phi_2 : \left| \begin{array}{rcl} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \begin{cases} t(-1, 2) + (1, 0) & \text{si } t \leq 1 \\ t(0, 2) & \text{si } t > 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

ϕ_2 est continue sur $[0, +\infty[$ (en particulier, en 1 car $(-1, 2) + (1, 0) = (0, 2) = \phi_2(1)$), et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$ avec :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, 1[, \quad \phi_2'(t) = (-1, 2) \in \{v^+\} = \mathcal{F}(\phi_2(t)) \\ \forall t > 1, \quad \phi_2'(t) = (0, 2) \in [-1, 1] \times \{2\} = \mathcal{F}(\phi_2(t)) \\ \phi_2'(t) \underset{t \to 1, t < 1}{\longrightarrow} (-1, 2) \in [-1, 1] \times \{2\} = \mathcal{F}(\phi_2(1)) \\ \phi_2'(t) \underset{t \to 1, t > 1}{\longrightarrow} (0, 2) \in [-1, 1] \times \{2\} = \mathcal{F}(\phi_2(1)) \end{cases}$$

Enfin, $\phi_2(0) = (1, 0) = y_{\text{init}}$, ce qui montre que ϕ_2 est solution globale du problème (2) pour $y_{\text{init}} = (1, 0)$: c'en est donc l'unique solution maximale.

3. Remarque : on a $v_1^- = 0 < 1 = v_1^+$, ce que l'énoncé a a priori exclu dans les hypothèses sur les valeurs prises par la fonction $\mathcal{F}$. Il est donc possible qu'il y ait là une erreur d'énoncé ; je poursuis néanmoins la résolution de cette question avec les vecteurs $v^- = (0, 1)$ et $v^+ = (1, 1)$.

(a) Soit le compact $K = [-1,1] \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$ et $\varepsilon \in]0,1]$. On pose :

$$\begin{cases} x_\varepsilon = (\frac{\varepsilon}{2}, 0) \in K \\ y_\varepsilon = (-\frac{\varepsilon}{2}, 0) \in K \end{cases} \qquad \text{de sorte que} \qquad \begin{cases} \mathcal{F}(x_\varepsilon) = \{v^+\} = \{(1,1)\} \\ \mathcal{F}(y_\varepsilon) = \{v^-\} = \{(0,1)\} \end{cases}$$

On a, pour tout $(v_{x_\varepsilon}, v_{y_\varepsilon}) \in \mathcal{F}(x_\varepsilon) \times \mathcal{F}(y_\varepsilon)$,

$$\langle v_{x_\varepsilon} - v_{y_\varepsilon}, x_\varepsilon - y_\varepsilon \rangle = \left\langle (1,1) - (0,1), \left(\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) - \left(-\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) \right\rangle = \langle (1,0), (\varepsilon, 0) \rangle = \varepsilon$$

donc :

$$\frac{\langle v_{x_\varepsilon} - v_{y_\varepsilon}, x_\varepsilon - y_\varepsilon \rangle}{\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\|^2} = \frac{\varepsilon}{\|(\varepsilon, 0)\|^2} = \frac{1}{\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$$

ce qui montre qu'aucune constante $C > 0$ ne permet de majorer $\langle v_x - v_y, x - y \rangle$ par $C\|x-y\|^2$ indépendamment de $(x,y) \in K^2$, et donc que $\mathcal{F}$ ne vérifie pas (3).

(b) Soit (ψ, T) une solution maximale du problème (2) pour $y_{\text{init}} = (1,0)$ et $(t_0, \ldots, t_N)$ une subdivision de $[0,T]$ adaptée pour ψ'. On note ψ_1 et ψ_2 les applications coordonnées de ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, qui possèdent donc les mêmes propriétés de continuité, de dérivabilité et de finitude de limites que ψ sur chaque $]t_i, t_{i+1}[$.
Puisque $\psi(0) = y_{\text{init}} = (1,0)$ avec ψ continue sur $[0,T[$, il existe $\varepsilon \in]0,T]$ que l'on prend maximal, tel que $\psi_1 > 0$ sur $[0,\varepsilon[$. Plus précisément, $\varepsilon = \min(\{t \in [0,T[\mid \psi_1(t) = 0\} \cup \{T\})$, qui existe bien car $\psi_1^{-1}(\{0\})$ est minoré par 0 et fermé par continuité de ψ_1, donc admet une borne inférieure qui est également son minimum.
On a dans ce cas, en notant $i_0 := \max\{i \in [\![0, N-1]\!] \mid t_i \leq \varepsilon\}$:

$$\begin{cases} \forall\, t \in [0,\varepsilon] \backslash \{t_0, \ldots, t_{i_0}\}, \quad \psi'(t) \in \mathcal{F}(\psi(t)) = \{v^+\} \\ \forall\, i \in [\![0, i_0 - 1]\!], \quad \lim_{t \to t_i, t > t_i} \psi'(t) \in \mathcal{F}(\psi(t_i)) = \{v^+\} \\ \forall\, i \in [\![1, i_0]\!], \quad \lim_{t \to t_i, t < t_i} \psi'(t) \in \{v^+\} \end{cases}$$

(la troisième proposition étant vraie même lorsque $t_{i_0} = \varepsilon$ et que l'on n'a pas donc pas $\psi(t_{i_0}) > 0$, en passant à la limite quand $t \to t_{i_0}^-$ dans la première proposition).
ψ est donc en fait $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\varepsilon[$ et ψ' y est constante égale à $v^+ = (1,1)$. De ceci et de la condition initiale, on déduit :

$$\forall\, t \in [0,\varepsilon[, \quad \psi(t) = t(1,1) + (1,0) = (1+t, t) \qquad \text{(i)}$$

Supposons par l'absurde que $\varepsilon < T$. Alors, $\psi_1(\varepsilon) \leq 0$ (ii) car sinon ψ serait strictement positive sur un voisinage de $]\varepsilon - \eta, \varepsilon + \eta[$ de ε contenu dans $[0,T[$ et ε ne serait par conséquent pas maximal puisque l'on pourrait prendre $\varepsilon + \eta > \varepsilon$ à la place. Or, d'après (i), $\forall\, t \in [0,\varepsilon[$, $\psi_1(t) \geq 1$ donc en passant à la limite lorsque $t \to \varepsilon$ et par continuité, on devrait avoir $\psi_1(\varepsilon) \geq 1$ ce qui contredit (ii).
L'expression (i) est donc valable sur $[0,T[$, et puisque l'on vérifie qu'elle fournit une solution globale au problème (2), on en déduit par maximalité de (ψ, T) que $T = +\infty$.
(2) admet donc une unique solution maximale, qui est :

$$\psi : \left| \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (1+t, t) \end{array} \right.$$

(c) Notons que le fait d'avoir $v_1^+ > v_1^-$ entraine que $[v_1^+, v_1^-] \times [v_2^+, v_2^-] = \emptyset$.
Ainsi, si (2) admettait une solution maximale (ψ, T) pour $y_{\text{init}} = (0,0)$, alors $\lim\limits_{t \to 0, t > 0} \psi'(t)$ existerait et appartiendrait à $\mathcal{F}(\psi(0)) = \mathcal{F}((0,0)) = \emptyset$, ce qui est impossible.
Donc, (2) n'admet cette fois-ci aucune solution maximale (et même, aucune solution tout court...).