Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

À rendre avec la copie 1 feuille de papier millimétré.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. **Les questions non correctement référencées ne seront pas notées**. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.
- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.
- Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.
- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Préambule

1. Rappeler, pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, les deux expressions (l'une faisant intervenir la fonction *cosinus*, l'autre la fonction *tangente*) de la dérivée de la fonction

$$x \mapsto \tan x$$

2. (a) Montrer que la fonction g qui, à tout réel x de $]0, \pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, associe $g(x) = \frac{1}{\tan x}$, se prolonge en une fonction $\tilde{g}$ continue sur $]0, \pi[$. Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable sur $]0, \pi[$.

   (b) En déduire une primitive sur $]0, \pi[$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$$

3. On considère les fonctions

$$f_1 : x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

   (a) Expliciter les domaines de définition respectifs $\mathcal{D}_{f_1} \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{f_2} \subset \mathbb{R}$ des fonctions f_1 et f_2.

   (b) Montrer que les fonctions f_1 et f_2 sont périodiques, de périodes respectives T_1 et T_2 que l'on explicitera.

   (c) Donner les domaines de dérivabilité respectifs des fonctions f_1 et f_2.

   (d) Donner, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_1, l'expression de $f_1'(x)$.

   (e) Montrer que, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_2,

$$f_2'(x) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

   et en déduire une expression simplifiée de $f_2'(x)$.

   (f) Etudier les variations des fonctions f_1 et f_2. On donnera leurs tableaux de variations respectifs sur une période, en précisant les limites aux bords.

   Donner, également, les valeurs des fonctions f_1 et f_2 en $\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

   (g) Tracer, sur un même graphe (échelle : 1 cm pour une unité), la courbe représentative de f_1 sur $\mathcal{D}_{f_1} \cap [-2\pi, 2\pi]$ et la courbe représentative de f_2 sur $\mathcal{D}_{f_2} \cap [-2\pi, 2\pi]$.

4. On considère la fonction

$$f_3 : x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$$

   (a) Expliciter le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_3} \subset \mathbb{R}$ de la fonction f_3. Quel est le domaine de dérivabilité de f_3 ?

(b) Etudier les variations de la fonction f_3 sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On donnera son tableau de variations, en précisant les limites aux bords.

Partie I

1. (a) Donner une primitive sur $\mathbb{R}_+^\star$ de la fonction logarithme népérien ln.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Exprimer, en fonction de ε :

$$\int_\varepsilon^1 \ln t \, dt$$

   (c) Etudier la convergence de

$$\int_0^1 \ln t \, dt$$

2. Etudier la convergence de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx$$

3. Rappeler le développement en série entière de la fonction arctangente (Arctan). On précisera le rayon de convergence.

4. Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} dx$$

On précisera et on énoncera le théorème utilisé.

Exprimer alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} dx$ en fonction de la somme d'une série, et sans le signe intégral.

5. On pose :

$$\mathcal{C} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

   (a) Montrer, à l'aide du changement de variable $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = u$, que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = -2\,\mathcal{C}$$

   (b) Justifier que $\frac{8}{9}$ est une valeur approchée de $\mathcal{C}$ (on donnera la précision).

(c) Pour tout entier naturel non nul N, on pose :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)^2}$$

Soit p un entier strictement plus grand que 2. Donner la valeur d'un entier naturel non nul N à partir de laquelle S_N est une valeur approchée de $\mathcal{C}$ à $10^{-2\,p}$ près.

On considère l'équation différentielle sur $]0,\pi[$:

$$y''(x) + y(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad (\mathcal{E})$$

1. On introduit la fonction f_4 qui, à tout réel x de $]0,\pi[$, associe :

$$f_4(x) = (\sin(x))\,\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Montrer que, pour tout réel x de $]0,\pi[$:

$$f_4''(x) = -f_4(x) + \frac{\cos x}{\sin x}$$

2. Résoudre l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.
3. Montrer que les solutions y de $(\mathcal{E})$ sur $]0,\pi[$ sont de la forme :

$$y = y_0 + f_4$$

où y_0 est une solution de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.

4. Dans cette question, on souhaite retrouver de façon différente le résultat obtenu précédemment. Pour cela, on cherche les solutions y de $(\mathcal{E})$ sur $]0,\pi[$ de la forme :

$$x \mapsto y(x) = z(x)\,\sin x$$

où z est une fonction deux fois dérivable sur $]0,\pi[$.

(a) Montrer que si y est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0,\pi[$, alors z' est solution sur $]0,\pi[$ d'une équation différentielle du premier ordre, notée $(\mathcal{E}')$.

(b) Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E}')$, puis appliquer la méthode de variation de la constante pour déterminer les solutions de $(\mathcal{E}')$. Donner alors, pour tout réel x de $]0,\pi[$, l'expression de $z'(x)$ en fonction de x.

(c) A l'aide du Préambule, exprimer, pour tout réel x de $]0,\pi[$, $z(x)$ en fonction de x.

(d) Montrer que l'on retrouve bien l'expression des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]0, \pi[$ obtenues plus haut.

Partie III

On introduit les fonctions G et H, définies respectivement sur les domaines $\mathcal{D}_G \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_H \subset \mathbb{R}$, par :

$$\forall x \in \mathcal{D}_G \quad : \quad G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}\, d\theta \ ;$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_H \quad : \quad H(x) = \int_0^{x} e^{-t^2}\, dt$$

1. Expliciter, en le justifiant avec soin, $\mathcal{D}_G$.
2. Etudier la continuité de la fonction G.
3. Déterminer :
$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0$$
4. Etudier la dérivabilité de la fonction G (pour cela, on se placera sur un intervalle de la forme $[-a, a]$, où a est un réel strictement positif), puis expliciter G' (à l'aide d'une intégrale).
5. (a) Expliciter $\mathcal{D}_H$.
   (b) Montrer que la fonction H est de classe C^1 sur $\mathcal{D}_H$. On explicitera la dérivée de H.
6. A l'aide du changement de variable $u = x\,\tan\theta$, montrer que, en tout réel x de son domaine de dérivabilité,
$$G'(x) = -2\,e^{-x^2}\,H(x)$$
(On distinguera les cas $x = 0$ et $x \neq 0$).
7. Montrer que la fonction $H^2 + G$ est constante, en précisant la valeur de cette constante.
8. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$, ainsi qu'une expression simplifiée de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\,t^2}\, dt$, pour tout réel $x > 0$.

Tournez la page S.V.P

Partie IV

1. Rappeler le développement en série entière de la fonction sinus (on précisera le rayon de convergence, ainsi que le domaine de convergence).

2. On considère la fonction φ, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que φ est développable en série entière, puis donner son développement en série entière.

3. Dans cette question, N désigne un entier strictement positif, et x est un réel quelconque. On introduit le polynôme P_N tel que :

$$P_N(X) = \left(1 - \frac{X}{\pi}\right)\left(1 + \frac{X}{\pi}\right)\left(1 - \frac{X}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{X}{2\pi}\right)\dots\left(1 - \frac{X}{N\pi}\right)\left(1 + \frac{X}{N\pi}\right)$$

Quel est le coefficient, noté α_N, de X^2 dans $P_N(X)$?

4. On admet, pour tout réel non nul x :

$$\lim_{N \to +\infty} P_N(x) = \varphi(x)$$

On désigne par α le coefficient de x^2 dans le développement en série entière de φ, et on suppose, de plus, que :

$$\lim_{N \to \infty} \alpha_N = \alpha$$

En déduire, grâce développement en série entière de φ, la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

5. En déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

ainsi que celle de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

6. On pose :

$$\mathcal{D} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)^2}$$

Que vaut $2\mathcal{D} - \mathcal{C}$? ($\mathcal{C}$ est la constante introduite dans la Partie I)

7. On donne :

$$\frac{\pi^2}{8} \approx 1,2337$$

Donner une valeur approchée de $\mathcal{D}$.

Dans ce problème, les propriétés de fonctions trigonométriques permettent d'exprimer des sommes de séries classiques – comme $C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$, *où* C *est la constante de Catalan – ou encore, la très classique intégrale de Gauss, dont la valeur est déterminée ici à l'aide d'intégrales à paramètres.*

Fin de l'épreuve