

Banque PT 2024 : physique A

Proposition de corrigé

clementpicard69000@gmail.com

I. Chute d'une gouttelette d'eau dans l'air

I.1. Cas d'une atmosphère sèche

1. La poussée d'Archimède \vec{P}_A s'exprime $\vec{P}_A = -\rho_a V \vec{g}$, avec V le volume immergé dans le fluide. Ici la goutte est entièrement immergée dans le fluide, ainsi $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, d'où :

$$\vec{P}_A = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a \vec{g}$$

2. On calcule le rapport entre les normes des deux forces :

$$\frac{\|\vec{P}_A\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{\rho_a V g}{\rho_e V g} = \frac{\rho_a}{\rho_e} = 10^{-3} \ll 1$$

La poussée d'Archimède est donc bien négligeable devant le poids de la goutte.

3. D'après la seconde loi de Newton : $m \vec{a} = \vec{f} + \vec{P}$. Par projection sur l'axe (Oz) , on obtient :

$$\begin{aligned} \rho_e V \frac{dv}{dt} &= -6\pi\eta_a R v + \rho_e V g \\ \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta_a R}{\rho_e V} v &= g \end{aligned}$$

Or $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + \frac{18\pi\eta_a R}{4\pi\rho_e R^3} v &= g \\ \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{9\eta_a}{2\rho_e R^2} v &= g \end{aligned}$$

4. On écrit l'équation différentielle sous la forme $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = g$, avec $\tau = \frac{2\rho_e R^2}{9\eta_a} = 0,4$ s.

5. La forme de la solution de l'équation différentielle est $v(t) = K \exp(-\frac{t}{\tau}) + g\tau$, avec K une constante réelle.

Or, la gouttelette quitte le nuage sans vitesse initiale, donc à $t=0$, $v(0) = 0$

$$\Rightarrow 0 = K + g\tau \Rightarrow K = -g\tau$$

On retrouve ainsi l'expression de $v(t) = g\tau[1 - \exp(-\frac{t}{\tau})]$

6. En notant v_{lim} la vitesse limite, on sait que $v_{lim} = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$, ainsi :

$$v_{lim} = g\tau = 4 \text{ m.s}^{-1}$$

7. Pour cette écoulement, on définit le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho_a D v_{lim}}{\eta_a}$, avec D le diamètre de la goutte.

On obtient $Re = 80$. Le nombre de Reynolds n'étant pas faible devant 1, le régime ne peut pas être considéré comme laminaire.

I.2. Cas d'une atmosphère humide

8. On suppose que l'augmentation du volume V est proportionnelle à sa surface S . Il existe donc k tel que : $\frac{dV}{dt} = kS$. Or $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Ainsi, il vient :

$$4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi k r^2 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = k$$

Par intégration, on retrouve bien $r(t) = r_0 + kt$

9. Soit $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_e$, alors

$$\frac{dm}{dt} = \frac{4}{3}\pi \frac{d(r^3)}{dt} \rho_e = 4\pi r^2 \rho_e \frac{dr}{dt}$$

Il vient au final :

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi \rho_e k (r_0 + kt)^2$$

10. On adapte la seconde loi de Newton : $m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v} = \vec{f} + \vec{P}$.

En projection sur (Oz) , on obtient :

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} + 4\pi \rho_e k r^2 v &= -6\pi \eta R v + mg \\ \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{4\pi \rho_e k r^2}{m} v + \frac{6\pi \eta_a r}{m} v &= g \end{aligned}$$

En remplaçant $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_e$ et après simplification, on obtient :

$$\frac{dv}{dt} + \left[\frac{3k}{r} + \frac{9\eta_a}{2\rho_e r^2} \right] v = g$$

Or $r(t) = r_0 + kt$, donc :

$$\frac{dv}{dt} + \left[\frac{3k}{r_0 + kt} + \frac{9\eta_a}{2\rho_e (r_0 + kt)^2} \right] v = g$$

On identifie $A = 3k$ et $B = \frac{9\eta_a}{2\rho_e}$

11. En tenant compte de la simplification proposée, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3k}{r_0+kt}v = g$$

On résout l'équation homogène (sans second membre), on note $v_h(t)$ sa solution. Etant donné que l'on n'a pas une forme "classique", on résout par séparation des variables :

$$\frac{dv}{v} = -\frac{3k}{r_0+kt}dt$$

On intègre cette équation pour obtenir $\ln(v_h) = -3\ln(r_0 + kt) + C = \ln[(r_0 + kt)^{-3}] + C$, avec C une constante réelle.

Après simplification, on obtient :

$$v_h = K(r_0 + kt)^{-3}$$

Avec K une constante réelle. On cherche à présent une solution particulière sous la forme affine $v_p(t) = at + b$. On injecte dans l'équation différentielle pour arriver à :

$$\begin{aligned} a + \frac{3k(at+b)}{r_0+kt} &= g \\ \Rightarrow a(r_0 + kt) + 3k(at + b) &= g(r_0 + kt) \\ \Rightarrow 4akt + ar_0 + 3kb &= gkt + gr_0 \end{aligned}$$

Par identification, on obtient alors :

$$\begin{cases} 4ak = gk \\ ar_0 + 3kb = gr_0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a = \frac{g}{4} \\ b = \frac{gr_0}{4k} \end{cases} \quad (2)$$

Ainsi, $v_p = \frac{g(r_0+kt)}{4k}$. La solution générale s'écrit alors $v(t) = v_h(t) + v_p = K(r_0 + kt)^{-3} + \frac{g(r_0+kt)}{4k}$

Or la gouttelette sort du nuage sans vitesse initiale soit

$$Kr_0^{-3} + \frac{gr_0}{4k} = 0 \Rightarrow K = \frac{-gr_0^4}{4k}$$

On obtient enfin la solution :

$$v(t) = \frac{g}{4k} \left[r_0 + kt - \frac{r_0^4}{(r_0+kt)^3} \right]$$

12. C'est la tension superficielle.

II. Formation d'un arc-en-ciel

13. En tenant compte de l'orientation des angles, on a :

$$D_1 = i_2 - i_1; D_2 = i_2 + i_3 - \pi; D_3 = i_3 + i_4$$

14. À la première réfraction, d'après la troisième loi de Snell-Descartes :

$$1 \times \sin(i_1) = n \sin(i_2) \Rightarrow i_2 = \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right)$$

À la première réflexion, d'après la seconde loi de Snell-Descartes :

$$i_3 = -(-i_2) = i_2 = \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right)$$

À la seconde réfraction, d'après la troisième loi de Snell-Descartes :

$$1 \times \sin(i_4) = n \sin(i_3) \Rightarrow i_4 = -i_1 \text{ à l'aide des relations précédentes.}$$

15. On a $D = D_1 + D_2 + D_3 = 2i_2 + 2i_3 + i_4 - i_1 - \pi$ à l'aide la question 13.

En utilisant les relations de la question 14., il vient après simplification :

$$D = 4\arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right) - 2i_1 - \pi$$

16. On cherche le maximum de D en fonction de i_1 . On dérive donc D par rapport à i_1 .

$$\frac{dD}{di_1} = 4 \frac{\cos(i_1)}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin i_1}{n}\right)^2}} - 2 = \frac{4\cos(i_1)}{\sqrt{n^2 - \sin(i_1)^2}} - 2$$

Comme on cherche le maximum de D , on cherche i_1 tel que $\frac{dD}{di_1} = 0$, soit

$$\begin{aligned} \frac{4\cos(i_1)}{\sqrt{n^2 - \sin(i_1)^2}} &= 2 \\ \Rightarrow 2\cos(i_1) &= \sqrt{n^2 - \sin(i_1)^2} \\ \Rightarrow 4\cos(i_1)^2 &= n^2 - \sin(i_1)^2 \\ \Rightarrow 4 - 4\sin(i_1)^2 &= n^2 - \sin(i_1)^2 \\ \Rightarrow \sin(i_{1,max}) &= \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \end{aligned}$$

17. En remplaçant dans D , l'expression de $i_{1,max}$ on obtient :

$$D_{max} = 4\arcsin\left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}}\right) - 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}\right) - \pi$$

18. D'après la loi de Cauchy, si λ augmente alors n diminue. De plus, la figure 5 montre que D_{max} est une fonction décroissante de n .

On en conclut que si la longueur d'onde augmente, alors D_{max} augmente aussi.

19. Le spectre visible comprend des longueurs d'onde entre 400 nm et 750 nm.

20. La longueur d'onde du rouge est plus élevée que celle du bleu. On en déduit alors que D_{max} est plus élevé pour le rayon rouge que le violet.

Ainsi, au niveau de la deuxième refraction, le rayon rouge est plus dévié vers le haut que le rayon violet. On en déduit que l'on voit la couleur rouge au-dessus de la couleur violette.

21. Au niveau de la première réflexion, il y a aussi un rayon réfracté dont la déviation va aussi dépendre de la longueur d'onde. Ainsi, il peut se créer un second arc-en-ciel.

De plus, les rayons peuvent se réfléchir une seconde fois dans la goutte, provoquant d'autres arcs-en-ciel (troisième refraction).

III. Fonctionnement d'un pluviomètre capacitif

III.1. Capacité du pluviomètre

22. On cherche le champ $\overrightarrow{E(M)}$ en un point quelconque M de l'espace.

Les plans $(M; \vec{e}_r; \vec{e}_\theta)$ $(M; \vec{e}_r; \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie pour la distribution de charges.

Or le champ $\overrightarrow{E(M)}$ appartient aux plans de symétrie de la distribution de charges, ainsi le champ $\overrightarrow{E(M)}$ est dirigé selon \vec{e}_r .

De plus, la distribution de charges est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe (Oz) car on considère la hauteur des armatures infinies. Ainsi, le champ $\overrightarrow{E(M)}$ ne dépende ni de θ , ni de z .

On en déduit alors que :

$$\overrightarrow{E(M)} = E(r)\vec{e}_r$$

23. En raison de la symétrie de problème, on choisit comme surface de Gauss, un cylindre d'axe (Oz) , de hauteur H et de rayon r avec $a_1 < r < a_2$. D'après le théorème de Gauss, on a :

$$\iint \overrightarrow{E(M)} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

On sépare le flux de $\overrightarrow{E(M)}$ en trois contributions : une pour la surface latérale S_{lat} et une pour chaque base circulaire du cylindre. Or pour chaque base, le champ $\overrightarrow{E(M)}$ est orthogonale à \vec{dS} , donc le flux est nul pour les bases.

Ainsi il reste :

$$\iint_{S_{lat}} \overrightarrow{E(M)} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Or, sur la surface latérale, le champ $\overrightarrow{E(M)}$ est de norme constante, donc on obtient :

$$E(r) \times 2\pi r H = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r H}$$

24. $C_0 = \frac{Q}{V_1 - V_2}$

25. On peut calculer $V_1 - V_2$ grâce à la circulation du champ $\overrightarrow{E(M)}$:

$$V_1 - V_2 = \int_{a_1}^{a_2} E(r) dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 H} \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

En remplaçant dans l'expression de C_0 , on obtient :

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 H}{\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)}$$

26. L'air et l'eau sont soumis à la même différence de potentiel $V_1 - V_2$. Ainsi, on peut considérer que l'air et l'eau se comportent comme deux condensateurs en dérivation.

Or deux condensateurs en dérivation sont équivalents à un unique condensateur dont la capacité totale est égal à la somme des capacités des deux condensateurs.

Ainsi, on peut bien écrire $C = C_{eau} + C_{air}$.

27. En utilisant l'expression trouvé à la question **25.**, on a :

$$C = C_{eau} + C_{air} = \frac{2\pi\epsilon h}{\ln(\frac{a_2}{a_1})} + \frac{2\pi\epsilon_0(H-h)}{\ln(\frac{a_2}{a_1})}.$$

On obtient alors, en faisant apparaître l'expresison de C_0 trouvé à la question**25.** :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 H}{\ln(\frac{a_2}{a_1})} (\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0 H} h + 1) = C_0 (\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0 H} h + 1)$$

On identifie alors $A = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0 H}$ et $B = 1$.

III.2. Conditionnement du pluviomètre

28. Pour un ALI idéal :

- le gain statique et l'impédance d'entrée sont supposés infinis.
- Les courants de polarisation sont nulles.
- l'impédance de sortie est nulle.

29. Il y a rétroaction entre l'entrée non-inverseuse + et la sortie de l'ALI. L'ALI 1 fonctionne donc en régime saturé.

30. D'après la loi des noeuds en terme de potentiel appliqué à l'entrée non-inverseuse + de l'ALI 1, on a :

$$\frac{u_1 - V^+}{R_1} = \frac{V^+ - u_2}{R_2}$$

Après simplification, on obtient :

$$V^+ = \frac{R_2 u_1 + R_1 u_2}{R_1 + R_2}$$

31. On suppose que $u_2(t) = +V_{sat}$, ainsi on peut écrire $V^+ > V^-$. Or $V^- = 0$ donc $V^+ > 0$.

On cherche le moment où l'ALI bascule, donc lorsque $V^+ < 0$, soit $R_2 u_1 + R_1 u_2 < 0$. Or $u_2 = +V_{sat}$, on obtient alors :

$$u_1 < \frac{-R_1 V_{sat}}{R_2} = U_1^-$$

32. On suppose que $u_2(t) = -V_{sat}$, ainsi on peut écrire $V^+ < V^-$. Or $V^- = 0$ donc $V^+ < 0$.

On cherche le moment où l'ALI bascule, donc lorsque $V^+ > 0$, soit $R_2 u_1 + R_1 u_2 > 0$. Or $u_2 = -V_{sat}$, on obtient alors :

$$u_1 > \frac{R_1 V_{sat}}{R_2} = U_1^+$$

33. Il n'y a pas de rétroaction entre l'entrée non-inverseuse + et la sortie de l'ALI. L'ALI 1 fonctionne donc en régime linéaire.

34. D'après la loi des noeuds en terme de potentiel appliqué à l'entrée inverseuse + de l'ALI 2, on a :

$$\frac{u_2 - V^-}{R_2} = C(h) \frac{d(V^- - u_3)}{dt}$$

Or, l'ALI 2 fonctionne en régime linéaire donc $V^- = V^+ = 0$. On en déduit donc que :

$$u_2(t) = -R_2 C(h) \frac{du_3}{dt}$$

On identifie alors $k = R_2 C(h)$

35. L'ALI 1 n'ayant pas basculé, on a alors que $u_2(t) = V_{sat}$. Donc $\frac{du_3}{dt} = -\frac{V_{sat}}{R_2 C}$. On en déduit par intégration entre $t = 0^+$ et t que :

$$u_3(t) = -\frac{V_{sat}}{R_2 C} t + U_1^+ = -\frac{V_{sat}}{R_2 C} t + \frac{R_1 V_{sat}}{R_2}$$

36. Il y aura basculement lorsque $u_3(t_1) = U_1^-$ d'après la question **31**. car $u_3 = u_1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} -\frac{V_{sat}}{R_2 C} t_1 + \frac{R_1 V_{sat}}{R_2} &= -\frac{R_1 V_{sat}}{R_2} \\ \Rightarrow t_1 &= 2R_1 C \end{aligned}$$

37. L'ALI 1 ayant basculé, on a alors que $u_2(t) = -V_{sat}$, soit $\frac{du_3}{dt} = \frac{V_{sat}}{R_2 C}$. On intègre alors entre t_1 et t :

$$u_3(t) = \frac{V_{sat}}{R_2 C} (t - t_1) + U_1^- = \frac{V_{sat}}{R_2 C} (t - t_1) - \frac{R_1 V_{sat}}{R_2}$$

En remplaçant $t_1 = 2R_1 C$ et après simplifications, on obtient :

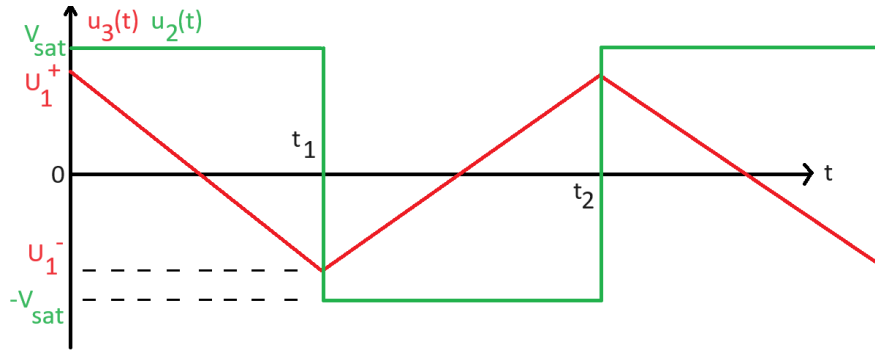
$$u_3(t) = \frac{V_{sat}}{R_2 C} t - \frac{3R_1 V_{sat}}{R_2}$$

38. Il y aura basculement lorsque $u_3(t_2) = U_1^+$ d'après la question **32**. car $u_3 = u_1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} -\frac{V_{sat}}{R_2 C} t_2 - \frac{3R_1 V_{sat}}{R_2} &= \frac{R_1 V_{sat}}{R_2} \\ \Rightarrow t_2 &= 4R_1 C \end{aligned}$$

39. A l'aide des expressions de $u_3(t)$, on voit que cette fonction est affine par morceaux, on obtient un signal triangle.

De plus, $u_2(t) = \pm V_{sat}$, c'est donc un signal créneau. On obtient alors la figure suivante :



40. On voit que $T = t_2 = 4R_1C$

III.3. Mesure d'un volume de précipitations

41. $h_S = \frac{h}{\pi(a_2^2 - a_1^2)}$

42. On reprend l'expression de la période $T = 4R_1C$. De plus, on a vu à la question 27. que $C = C_0(Ah + B)$. On en déduit alors que :

$$h = \frac{T}{4R_1C_0A} - \frac{B}{A}$$

En réutilisant les expressions de A et B vues à la question 27., on obtient :

$$h = \frac{T - 4R_1C_0}{4R_1C_0(\epsilon - \epsilon_0)} \epsilon_0 H$$

On en déduit l'expression de $h_S = \frac{T - 4R_1C_0}{4\pi R_1C_0(\epsilon - \epsilon_0)(a_2^2 - a_1^2)} \epsilon_0 H$

43. $h_S = 5,0$ cm.

IV. Remplissage d'une nappe phréatique

44. Pour un écoulement visqueux, le fluide suit la paroi au contact de celle-ci. La paroi étant immobile, on a donc $v(a) = 0$.

45. La relation donnée peut s'écrire $\vec{\Delta} \vec{v} = -\frac{\rho_e}{\eta_e} \vec{g}$.

Par projection sur \vec{e}_z , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) &= -\frac{\rho_e g}{\eta_e} \\ \rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) &= -\frac{\rho_e g}{\eta_e} r \end{aligned}$$

On intègre une première fois pour obtenir

$$\begin{aligned} r \frac{dv}{dr} &= -\frac{\rho_e g}{2\eta_e} r^2 + A \\ \Rightarrow \frac{dv}{dr} &= -\frac{\rho_e g}{2\eta_e} r + \frac{A}{r} \end{aligned}$$

Avec A une constante. En intégrant une seconde fois, on obtient :

$$v(r) = -\frac{\rho_e g}{4\eta_e} r^2 + A \ln(r) + B$$

Afin d'éviter toute divergence de $v(r)$ en $r = 0$, on prend $A = 0$. De plus, on sait que $v(a) = 0$, soit :

$$-\frac{\rho_e g}{4\eta_e} a^2 + B = 0 \Rightarrow B = \frac{\rho_e g}{4\eta_e} a^2$$

On en déduit alors le profil de vitesse :

$$v(r) = \frac{\rho_e g}{4\eta_e} (a^2 - r^2)$$

On identifie $K = \frac{\rho_e g}{4\eta_e}$

46. On va calculer Δt_{min} en prenant la vitesse maximale de l'eau, à savoir en $r = 0$.

$$\Delta t_{min} = \frac{H}{v(r=0)} = \frac{4\eta_e H}{\rho_e g a^2} = 4 \times 10^8 \text{ s}$$

47. On a $D_v = \iint v(r) dS$, soit

$$\begin{aligned} D_v &= \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\rho_e g}{4\eta_e} (a^2 - r^2) r d\theta dr \\ \Rightarrow D_v &= 2\pi \int_{r=0}^a \frac{\rho_e g}{4\eta_e} (ra^2 - r^3) dr \\ \Rightarrow D_v &= \frac{\pi \rho_e g}{2\eta_e} \int_{r=0}^a (ra^2 - r^3) dr \\ \Rightarrow D_v &= \frac{\pi \rho_e g}{2\eta_e} \left[\left(\frac{r^2}{2} a^2 - \frac{r^4}{4} \right) \right]_0^a \\ \Rightarrow D_v &= \frac{\pi \rho_e g a^4}{8\eta_e} \end{aligned}$$

48. La vitesse moyenne v_{moy} est elle que $D_v = v_{moy} \pi a^2$, d'où :

$$v_{moy} = \frac{D_v}{\pi a^2} = \frac{\rho_e g a^2}{8\eta_e}$$

49. $\Delta t_{moy} = \frac{H}{v_{moy}} = \frac{8\eta_e H}{\rho_e g a^2} = 8 \times 10^8 \text{ s}$

50. Le temps moyen pour que l'eau atteigne la nappe phréatique étant extrêmement élevée (plus d'une année), l'eau a le temps de s'enrichir en minéraux présents dans le sol durant sa chute.

V. Production hydraulique d'un barrage

51. Le système étant symétrique par rapport au plan bissecteur, et la pression de l'eau étant plus élevée que celle de l'air, on peut en déduire que la résultante \vec{F} est dirigée selon $-\vec{e}_x - \vec{e}_y$.

52. La pression de l'air étant uniforme, on peut écrire directement que $\vec{F}_{air} = P_0 \iint_S \vec{dS}$.

Ici $\vec{dS} = -R d\theta dz \vec{e}_r$.

Attention ici, \vec{e}_r n'est pas un vecteur constant le long de la surface, sa direction change, il ne peut donc pas être sorti de l'intégrale. On le réécrit alors dans la base cartésienne, où les vecteurs sont constants :

$$\vec{dS} = -Rd\theta dz(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y)$$

On calcule alors la résultante \vec{F}_{air} :

$$\vec{F}_{air} = P_0R \int_{z=0}^H \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) d\theta dz$$

Or $\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta = 1$. Ainsi :

$$\vec{F}_{air} = P_0RH(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

53. D'après la relation de la statique des fluides projetée sur l'axe (Oz) : $\frac{dP}{dz} = -\rho_e g$

Donc $P(z) = -\rho_e gz + A$ avec A une constante.

Or $P(z = H) = P_0$ donc $A = P_0 + \rho_e gH$. On en conclut que :

$$P(z) = P_0 + \rho_e g(H - z)$$

54. On a $\vec{F}_{eau} = \iint_S P \vec{dS}$

On réécrit à nouveau \vec{dS} dans la base cartésienne.

$$\vec{dS} = -Rd\theta dz(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y)$$

On calcule alors la résultante \vec{F}_{eau}

$$\vec{F}_{eau} = - \int_{z=0}^H \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} P(z)R(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) d\theta dz$$

$$\vec{F}_{eau} = -R \int_{z=0}^H P(z) \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) d\theta dz$$

Or $\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta = 1$. Ainsi :

$$\vec{F}_{eau} = -R \int_{z=0}^H P(z) dz (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

$$\vec{F}_{eau} = -R \int_{z=0}^H (P_0 + \rho_e g(H - z)) dz (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

$$\vec{F}_{eau} = [-RP_0H - \rho_e g \int_{z=0}^H (H - z) dz] (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

$$\vec{F}_{eau} = [-RP_0H - R\rho_e g \frac{H^2}{2}] (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

55. $\vec{F} = \vec{F}_{air} + \vec{F}_{eau} = -R\rho_e g \frac{H^2}{2} (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$.

Or $\|\vec{e}_x + \vec{e}_y\| = \sqrt{2}$. Ainsi, on retrouve :

$$F = \frac{R\rho_e g H^2}{\sqrt{2}}$$

56. $F = \frac{R\rho_e g H^2}{\sqrt{2}} = 2,4 \times 10^{11}$ N.

57. Calculons dans un premier temps la pression moyenne exercée sur le barrage :

$$P_{moy} = \frac{1}{H} \int_0^H (P(z) - P_0) dz = \frac{\rho_e g}{H} \int_0^H (H - z) dz = \frac{\rho_e g H}{2}$$

On estime alors la puissance moyenne p apportée par les forces de pression :

$$p = \frac{\rho_e g H}{2} \times D_v = 10^9 \text{ W.}$$

En comparaison, la puissance d'une centrale nucléaire est d'environ 10^9 W. On est très proche, mais bien sûr, on est dans un cadre purement théorique.

FIN DU CORRIGÉ