CONCOURS COMMUN CINP 2024
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 1 - FILIÉRE MP

m.laamoum2@gmail.com [1]

EXERCICE I

X est une variable aléatoire á valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance finie

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- On a $[X > k-1] = [X > k] \cup [X = k]$ et $[X > k] \cap [X = k] = \varnothing$, donc

$$\mathbb{P}(X > k-1) = \mathbb{P}(X > k) + \mathbb{P}(X = k)$$

par suite $\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X &= k) = \sum_{k=1}^{n} k\left(\mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k)\end{aligned}$$

dans la première somme on change k en $k-1$ et dans la deuxième on rajoute le terme $k = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X &= k) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)\end{aligned}$$

- Montrons que $n\mathbb{P}(X > n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

On a $\mathbb{P}(X > n) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)$ donc

$$0 \leq n\mathbb{P}(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$$

X admet une espérance donc la série $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ converge par suite le reste $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$ tend vers 0 en $+\infty$.

Par comparaison on a $n\mathbb{P}(X > n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Ainsi la série $\sum \mathbb{P}(X > n)$ converge et par passage à la limite on a

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).}$$

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

- Posons pour $i \in [\![1, p]\!]$, Y_i la variable aléatoire qui donne le résultat du i eme tirage .

[1] `https://tinyurl.com/2qyzzrbd`

On a alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$

$$[X \leq k] = \bigcap_{i=1}^{p} [Y_i \leq k]$$

le tirage est avec remise donc les Y_i sont mutuellement indépendantes , ce qui donne

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \prod_{i=1}^{p} \mathbb{P}(Y_i \leq k)$$

les Y_i suivent la loi uniforme $\mathcal{U}([1,n])$ donc $\mathbb{P}(Y_i \leq k) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(Y_i = j) = \frac{k}{n}$, d'où

$$\boxed{\mathbb{P}(X \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p}$$

- Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1)$ donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \frac{k^p - (k-1)^p}{n^p}}$$

Q3.

- Remarquons que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p$ est la somme de Riemann d'ordre n de la fonction $x \mapsto x^p$ sur l'intervalle $[0,1]$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \quad (1)}$$

- La question **Q1** donne $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X > k)$ et on a $\mathbb{P}(X > k) = 1 - \mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p \\ &= n - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p \end{aligned}$$

de la relation (1) on a $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{p+1}$,d'où $\boxed{\mathbb{E}(X) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{pn}{p+1}}$.

EXERCICE II

On considère, sur $I =]0,+\infty[$, les équations différentielles:

$$\begin{aligned} (E) : &\quad x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1 \\ (H) : &\quad x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 0 \end{aligned}$$

Q4. Sur I l'équation (H) s'écrit : $y'' = \frac{-4}{x}y' + \frac{2-x^2}{x^2}y$, c'est une équation homogène linéaire d'ordre 2 à coefficients définis et continus sur I , donc $\mathcal{S}_I(H)$ est $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2.

Q5. Soit f une solution de (E) développable en série entière , écrivons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, donc on a pour $x \in]-R,R[$

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n n x^{n-1} \text{ et } f''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}$$

par suite

$$x^2f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^n \ , \ 4xf'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}4a_n n x^n$$

et

$$(2-x^2)f(x)=2\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{n+2}$$

dans la deuxième somme on change $n+2$ en n , ce qui donne

$$\begin{aligned}(2-x^2)f(x) &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n-\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}x^n\\ &= 2a_0+2a_1x+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(2a_n-a_{n-2}\right)x^n\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}x^2f''(x)+4xf'(x)+(2-x^2)f(x) &= 2a_0+6a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n\left(n(n-1)+4n+2\right)-a_{n-2}\right]x^n\\ &= 2a_0+6a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n\left(n+1\right)(n+2)-a_{n-2}\right]x^n\end{aligned}$$

f une solution de (E) , donc

$$\forall x\in\left]-R,R\right[\ , 2a_0-1+6a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n\left(n+1\right)(n+2)-a_{n-2}\right]x^n=0$$

par suite

$$\left\{\begin{array}{r}2a_0-1=0\\ a_1=0\\ a_n\left(n+1\right)\left(n+2\right)-a_{n-2}=0 \quad , \ \forall n\geq 2\end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{r}a_0=\frac{1}{2}\\ a_1=0\\ a_n=\dfrac{a_{n-2}}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)} \quad , \ \forall n\geq 2\end{array}\right.$$

- Si $n=2p+1$ alors $a_{2p+1}=\dfrac{a_{2p-1}}{\left(2p+2\right)\left(2p+2\right)}$, comme $a_1=0$ alors $a_{2p+1}=0$ pour tout $p\geq 1$.
- Si $n=2p$ alors $a_{2p}=\dfrac{a_{2(p-1)}}{\left(2p+1\right)\left(2p+2\right)}$ pour tout $p\geq 1$, ce qui donne

$$a_{2p}=\frac{1}{\left(2p+2\right)\left(2p+1\right)}\frac{1}{\left(2p\right)\left(2p-1\right)}...\frac{1}{4.3}\ \frac{1}{2}=\frac{1}{(2p+2)!}.$$

Ainsi $\boxed{f(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2p+2)!}x^{2p}}$. Ce qui donne $R=+\infty$ par suite f est solution de (E) sue I .

Pour tout $x\in I$ on a $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2p+2)!}x^{2p+2}=\dfrac{1}{x^2}\sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2p)!}x^{2p}$, or $\operatorname{ch}(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2p)!}x^{2p}$ donc $\boxed{f(x)=\dfrac{\operatorname{ch}(x)-1}{x^2}}$.

Q6. On note pour $x \in I$, $g(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ et $h(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x^2}$.On admet que $g \in \mathcal{S}_I(E)$ et $h \in \mathcal{S}_I(H)$.
Une solution de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et d'une solution de (H).
Une autre solution de (H) est donnée par $q = f - g$, donc $q(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(x)}{x^2}$.
Le Wronskien de la famille (q, h) est donné par

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} q(x) & h(x) \\ q'(x) & h'(x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{\cosh(x)}{x^2}\left(-\frac{2\sinh(x)}{x^3} + \frac{\cosh(x)}{x^2}\right) - \frac{\sinh(x)}{x^2}\left(-\frac{2\cosh(x)}{x^3} + \frac{\sinh(x)}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{x^4} \end{aligned}$$

$W(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ ce qui assure que (q, h) est un système fondamental de solutions de (H) donc $\mathcal{S}_I(H) = \operatorname{vect}(q, h)$.
Ainsi $\boxed{\mathcal{S}_I(E) = \{y = g + \alpha q + \beta h\ ,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}}$.
Q7. Soit $y \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$.

- La restriction $y_{|I}$,de y sur I , est une solution de (H) sur I , donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_{|I} = \alpha q + \beta h$, ainsi pour tout $x \in I$ $(=]0, +\infty[)$

$$y_{|I}(x) = y(x) = \alpha\frac{\operatorname{ch}(x)}{x^2} + \beta\frac{\operatorname{sh}(x)}{x^2}\ (*)$$

y est dans $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$ donc elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ en particulier en 0 , au voisinage de 0 on a

$$\begin{aligned} \alpha\frac{\operatorname{ch}(x)}{x^2} + \beta\frac{\operatorname{sh}(x)}{x^2} &= \frac{\alpha(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)) + \beta(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))}{x^2} \\ &= \frac{\alpha + \beta x + \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{6}x^3 + o(x^3)}{x^2} \end{aligned}$$

qui n'admet de limite en 0 que si $\alpha = \beta = 0$ d'où $y = 0$.

- La restriction $y_{|(-I)}$,de y sur $]-\infty, 0[$ donne une solution z de (H) I par $z(x) = y_{|(-I)}(-x) = y(-x)$,pour tout $x \in]0, +\infty[$. Donc $y_{|(-I)}$ admet une expression de la forme (*) , par le même raisonnementon trouve $y_{|(-I)} = 0$. Donc $y = 0$ sur $\mathbb{R}$ par suite $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = \{0\}$.

La dimension de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$ est zéro et pas 2 car on ne peut pas écrire l'équation (H) sous la forme $y'' = a(x)y' + b(x)y$ avec a et b des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$.

PROBLEME

Q8. On écrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}$$

donc

$$\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ainsi $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

Partie I

Q9. On a $\left((\sin(x))^{n+1}\right)' = (n+1)\cos(x)\ (\sin(x))^n$, par une intégration par parties on trouve

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(x))'\,(\sin(x))^{n+1}\,dx \\
&= \Big[-\cos(x)\ \ (\sin(x))^{n+1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,(\sin(x))^n\,dx \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))\,(\sin(x))^n\,dx \\
&= (n+1)(W_n - W_{n+2})
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n}$.
Par suite $(2n+1)W_{2n+1} = (2n)W_{2n-1}$ ce qui donne

$$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}...\frac{2}{3}W_1$$

$W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2}\,dx = 1$ donc

$$\boxed{W_{2n+1} = \frac{(2\times 4\times ...\times 2n)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}$$

Q10.

- Soit $x \in \left]-1,1\right[$,on a $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n$$

avec

$$\begin{aligned}
\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)...\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \\
&= (-1)^n\frac{1\times 3\times ...(2n-1)}{n!} \\
&= (-1)^n\frac{(2n)!}{(2\times 4\times ...\times 2n)n!} \\
&= (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}
\end{aligned}$$

ainsi on a $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}}$.

- Par intégration entre 0 et x on obtient $\boxed{\mathrm{Arcsin}\,(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}\ ,\forall x\in\left]-1,1\right[}$

Q11. Soit $x \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin(x) \in [0,\ 1[$ la question précédente donne

$$x = \mathrm{Arcsin}\,(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2\,(2n+1)}(\sin(x))^{2n+1}.$$

Q12. Utilisons le théorème d'intégration des séries de fonctions sur un intervalle quelconque qui permet l'interversions des symboles $\sum$et $\int$.

Posons pour tout $x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[$, $f_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}(\sin(x))^{2n+1}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue intégrable et positive sur $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[$.
- Le série $\sum f_n$ converge simplement sur $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[$ vers une fonction continue.
- $\displaystyle\int_{\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[} |f_n(x)|\, dx = W_{2n+1}\frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2\,(2n+1)}$,or $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ donc $\displaystyle\int_{\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[} |f_n(x)|\, dx = \frac{1}{(2n+1)^2}$

par suite la série $\displaystyle\sum \int_{\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[} |f_n(x)|\, dx$ converge .

Ainsi par le théorème d'intégration des séries de fonctions on a

$$\int_{\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx. = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[} f_n(x)dx.\right)$$

d'où l'on a $\boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2\,(2n+1)}(\sin(x))^{2n+1}\right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2\,(2n+1)}(\sin(x))^{2n+1} dx.}$

Q13. Les questions **Q11.**et **Q12.**donnent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2\,(2n+1)} W_{2n+1}.$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et d'après **Q8.** ona $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie II

Q14.

- Pour tout $x \in]-1, 1[$ on a $\displaystyle\frac{1}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -x^{2n}$.
- Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ pour tout $x \in]0, 1[$.

La relation précédente donne pour tout $x \in]0, 1[$ $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\ln(x)x^{2n}$. Posons $f_n(x) = -\ln(x)x^{2n}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et positive sur $]0, 1]$. On a $\sqrt{x}\ f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, par la règle de Riemann f_n est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $]0, 1[$.
- Soit $x \in]0, 1]$, on a

$$\int_x^1 \ln(t)t^{2n}dt = \left[\ln(t)\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^{2n}}{2n+1}dt = -\ln(x)\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

par suite

$$\int_{]0,1[} |f_n(t)|\, dt = \int_{]0,1]} |f_n(t)|\, dt = \lim_{x\to0^+} \int_x^1 -\ln(t)t^{2n}dt = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Donc la série $\displaystyle\sum \int_{]0,1[} |f_n(t)|\, dt$ converge .

Le théorème d'intégration des séries de fonctions sur un intervalle quelconque donne

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{]0,1[} f_n(t)dt$$

doù $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}}$.

Q15. On pose pour $x \in [0,+\infty[$, $\quad f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}\, dt$.

Soit pour $(x,t) \in ([0,+\infty[)^2$, $\quad g(x,t) = \dfrac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}$.

- Pour tout $(x,t) \in ([0,+\infty[)^2$ on a $\left|\dfrac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{1+t^2}$, la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable

sur $[0,+\infty[$ donc la fonction $t \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.
Donc f est bien définie sur $[0,+\infty[$.

- On a g est continue sur $([0,+\infty[)^2$ et $|g(x,t)| \leq \varphi(t)$ pout tout $(x,t) \in ([0,+\infty[)^2$, avec φ intégrable

sur $[0,+\infty[$. Donc f est continue sur $[0,+\infty[$.

Q16. On a g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $([0,+\infty[)^2$ et $\dfrac{\partial}{\partial x}g(x,t) = \dfrac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$.

Si $(x,t) \in]0,1] \times [0,+\infty[$ alors $\left|\dfrac{\partial}{\partial x}g(x,t)\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2} = \frac{2}{\pi}\varphi(t)$,qui est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Ce qui prouve que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur$]0,1]$ et $\boxed{f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}dt}$.

Q17. On vérifie facilement que $\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{x^2t}{1+t^2x^2} = \dfrac{(1-x^2)\,t}{(t^2x^2+1)(t^2+1)}$.
De la question précédente on a pour tout $x \in]0,1[$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x^2)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2}\right)dt$$

Les deux fonctions sous le signe intégral ne sont pas intégrables sur $[0,+\infty[$, prenons un $A > 0$ alors

$$\int_0^A \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+A^2}{1+A^2x^2}\right)$$

ce qui donne par passage à la limite

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2}\right)dt = -\ln(x)$$

On en déduit que pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.

Q18.

- On a

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{1+t^2}dt = \left[\frac{1}{2}\text{Arctan}^2(t)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$$

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur$]0,1]$ et pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ donc $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$

, la continuité en 1 donne $f(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$.

- La question **Q14.** donne $f(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, d'après la question **Q14.** on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.