Correction de l'épreuve Mathématiques I CCINP 2024 filière MP
Par DOURVILLE Jérémy.
Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des questions/ ou suggestions, n'hésitez pas à me contacter par mail : Jerdourville@gmail.com

Exercice I

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a $k-1 \in \mathbb{N}$ et donc $[X=k], [X>k]$ et $[X>k-1]$ qui sont des évènements.
L'ensembe $[X = k]$ et $[X > k]$ sont disjoints, et leur réunions vaut $[X > k-1]$.
Ainsi $\mathbb{P}(X=k) + \mathbb{P}(X>k) = \mathbb{P}(X>k-1)$.
C'est à dire $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X>k-1) - \mathbb{P}(X>k)$.

D'après le résultat précédent on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X>k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X>k) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\mathbb{P}(X>i) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X>k) \text{ (changement d'indice i=k-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n) + \mathbb{P}(X>0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n)
\end{aligned}$$

On a bien, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n)$.

Comme X est d'espérance finie, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{E}(X)$. Donc

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = 0$ car l'on a le reste d'une série convergente.

Or $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) \geq \sum_{k=n}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=k) \geq n\mathbb{P}(X\geq n)$.

De plus $[X>n]$ est inclus dans $[X \geq n]$, donc $\mathbb{P}(X\geq n) \geq \mathbb{P}(X>n)$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) \geq n\mathbb{P}(X>n) \geq 0$. Par théorème des gendarmes on obtient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(X>n) = 0$.

Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X>k)$ converge, et en passant à la limite le résultat précédant on obtient : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X>k)$

Q2. On va calculer la probabilité par dénombrement. Il y a n^p tirages possibles. Pour que $X \leq k$ il faut que chaque boule soit inférieur ou égale à k. Donc chaque boule à k possibilités. Comme les tirages sont succesifs et indépendants(car il y a remise) alors il y a k^p tirages possibles pour avoir $X \leq k$.
Ainsi $\forall k \in [|1,n|], \mathbb{P}(X \leq k) = (\frac{k}{n})^p$.
On a de plus $\mathbb{P}(X \leq 0) = 0$ et $\mathbb{P}(X \leq k) = 1$ pour $k \geq n$ car X est à valeurs dans $[|1,n|]$.

En utilisant le résultat de la question 1 :
$\forall k \in [|1,n|], \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq k-1) - \mathbb{P}(X > k) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq k-1) - (1 - \mathbb{P}(X \leq k)) \\ &= \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1) \end{aligned}$$

Donc $\forall k \in [|1,n|], \mathbb{P}(X = k) = \frac{k^p - (k-1)^p}{n^p}$ et $\mathbb{P}(X = k) = 0$ si $k \notin [|1,n|]$.

Q3. On reconnait une somme de Riemann, et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

On a d'après la question 1 que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{n} 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p = n \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p\right).$$

Avec le résultat on a donc $\left(1 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{p}{p+1}$.
Et donc $\mathbb{E}(X) \underset{+\infty}{\sim} \frac{np}{p+1}$.

Exercice II

Q4. La fonction $f_1 : x \mapsto x^2$ est continue sur I est ne s'annule pas. Les fonctions $f_2 : x \mapsto 4x$ et $f_3 : x \mapsto 2 - x^2$ sont continues sur I. Donc $\mathcal{S}_I(H)$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Q5. On va raisonner par analyse-synthèse. Analyse : Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.
Si f est solution de (H) alors en identifiant le terme générale des deux séries entières (unicité du dévellopement) : $2a_0 = 1$(terme constant),
$4a_1 + 2a_1 = 0$(terme d'ordre 1) et
$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n - a_{n-2} = 0$. C'est à dire, $a_0 = \frac{1}{2}$ et $a_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, a_n(n^2 + 3n + 3) = a_{n-2}$.
Comme $n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{N}$ on a donc $a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}$. On obtient alors (par réccurence), $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \frac{1}{(2n+2)!}$

pour $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!x^{2n}}$.
Synthèse : La fonction est bien dévellopable en série entière avec un rayon de convergence $R = +\infty$ d'après la règle de d'Alembert. De plus on a $\forall x \in I, x^2 f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!x^{2n+2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!x^{2n}} = ch(x) - 1$. Ainsi l'unique solution dévellopable en série entière est $f : x \mapsto \frac{ch(x)-1}{x^2}$.

Q6. La fonction f-g est solutions de (H) sur I.
Les fonctions f-g et h sont non proportionelles (f équivault à $-1/x^2$ au voisinage 0 tandis que h équivault à $1/x$ au voisinage de 0). Donc la famille (f-g,h) est libre.Or l'espace des solutions est de dimensions 2 (Q4).
Ainsi f-g et h forment une base de l'espace des solutions homogènes.
$\mathcal{S}_I(E) = \{\lambda(f-g) + \mu h + g \backslash \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\}$

Q7. On note J$=]-\infty, 0[$. Les fonctions f et g sont aussi solutions sur J de (E), donc f-g est toujours solutions sur J de (H). De même h est toujours solutions sur J de (H) Soit $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2$ et μ_2 des réels,tels que $y_1 = \lambda_1(f-g) + \mu_1 h$ soit solutions sur I et $y_2 = \lambda_2(f-g) + \mu_2 h$ soit solutions sur J. On va chercher a faire un raccords des solutions sur $\mathbb{R}$.
y_1 et y_2 doivent être continue en 0 donc $\mu_1 = \mu_2 = 0 = \lambda_1 = \lambda_2$. La seul fonction solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ et la fonction nulle. Ainsi on a $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = \{0\}$. Donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$ est un espace vectoriel de dimension 0.

Problème

Q8. Les séries étudiés sont convergentes car on a des séries de Riemann (-2<-1 et $\displaystyle\sum_{n \leq 1} n^\alpha$ convergent pour $\alpha < -1$).
On note $C = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\begin{aligned} C = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1,\text{n pair}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1,\text{n impair}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= Cover4 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi $C = \frac{4}{3} * \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie I

On note I$=[0, \frac{\pi}{2}]$.

Q9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \sin(x)^n$ est continue sur I.Donc W_n est bien défini pour tout n.
En notant $f : x \mapsto \sin(x)^n$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On a $f'(x) = (n+1)\cos(x)\sin(x)^n$. On effectue une intégration par parties en dérivant f et en intégrant $x \mapsto \sin(x)$.

$$\begin{aligned} W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^{n+2}dx = [-\cos(x)\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos(x)^2\sin(x)^n dx \\ = 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin(x)^2)\sin(x)^n dx \\ = (n+1)(W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

Ainsi on a pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2}W_n = W_{n+2}$.

On a $W_{2n+1} = W_{2n-1}\frac{2n}{2n+1} = W_{2n-3}\frac{2n.(2n-2)}{(2n+1).(2n-1)} = W_1\frac{2n(2n-2)...2}{(2n+1)(2n-1)...3}$ en appliquant le résultat ci dessus par réccurence.
Or $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = (-\cos(\frac{\pi}{2}) - (-\cos(0))) = 1$.
Donc $W_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)...2}{(2n+1)(2n-1)...3} = \frac{(2n(2n-2)...2)^2}{(2n+1)(2n-1)...3*2n(2n-2)...2} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^2 nn!^2}{(2n+1)!}$. On a bien $\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}$

Q10. Pour un paramètre fixé a on à : $(1+t)^a = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!}t^n$
Donc $(1-t^2)^a = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!}t^{2n}$.
Avec $a = -\frac{1}{2}$ on a :

$$\begin{aligned} (-1)^n a(a-1)...(a-n+1) &= (-1)^n.\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}...\frac{-(2n-1)}{2} \\ &= \frac{(2n-1).(2n-3)..1}{2^n} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n}\frac{1}{2.4....2n} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \\ &= \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

On a donc $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}t^{2n}$.
De plus $\frac{Arcsin'(t)=1}{\sqrt{1-t^2}}$ et $Arcsin(0) = 0$.
On obtient ainsi $Arcsin(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)4^n}\binom{2n}{n}t^{2n+1}$ pour $t \in]-1,1[$.

Q11. On a $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, Arcsin(sin(x)) = x$.
Pour x dans cette intervalle, $\sin(x) \in]-1,1[$.

Donc d'après la question précédante on a :
$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n}\binom{2n}{n}\sin(x)^{2n+1} = x.$

Q12. On veut inverser le symbole somme et celui d'intégrale. On note $f_n : x \mapsto \frac{1}{(2n+1)4^n}\binom{2n}{n}\sin(x)^{2n+1}$.
On va appliquer le théorèmes de convergence dominée.
-Pour tous n, f_n est continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
-$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n}\binom{2n}{n}\sin(x)^{2n+1}$ converge simplement vers la fonction identité qui est continuer sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
-Soit $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)4^n}\binom{2n}{n}\sin(x)^{2n+1} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n}\binom{2n}{n}\sin(x)^{2n+1} = x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
Or $x \mapsto x$ est continue et intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Donc le théorème de convergence dominée s'applique pour tous $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n}\binom{2n}{n}\sin(x)^{2n+1}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(2n+1)4^n}\binom{2n}{n}\sin(x)^{2n+1}dx$$
.

Q13. On a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(2n+1)4^n}\binom{2n}{n}\sin(x)^{2n+1}dx = \frac{1}{(2n+1)4^n}\binom{2n}{n}W_{2n+1}$.
Donc d'après Q9 on déduis que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(2n+1)4^n}\binom{2n}{n}\sin(x)^{2n+1}dx = \frac{1}{(2n+1)^2}$.
On a donc d'après Q12, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n}\binom{2n}{n}\sin(x)^{2n+1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx = \frac{\pi^2}{8}$.

En utilisant la question 8 on a ainsi montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie II

Q14. $\forall x \in]-1, 1[, 1overx^2 - 1 = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$

La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2-1}$ est continue sur]0,1[.
En 0 la fonction équivault à-ln(x) qui est intégrable au voisinage de 0.
En 1 la fonction équivault à $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2*x-1}$, donc la fonction est inrégrable au voisinage de 1.
Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx$ est bien définie.
De plus $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} -\ln(x)x^{2n}dx$.

On veut ici aussi inverse le symbole somme et le symbole intégrale.On va appliquer le théorème de sommation terme à terme.
On note $u_n : x \mapsto x^{2n}\ln(x)$.
-Pour tout n, la fonction u_n est continue sur]0,1[et est intégrable (comme la fonction ln est intégrable sur]0,1[alors les fonctions $x \mapsto x^{2n}\ln(x)$ sont aussi intégrables par comparaison).
-La série $\sum\limits_{n\leq 0} u_n$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2-1}$ qui est continue sur]0,1[.
-On a $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)x^{2n}dx = [\frac{x^{2n+1}\ln(x)}{2n+1}] - \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{2n+1}dx = \frac{-1}{(2n+1)^2}$ (on effectue une intégration par partie en dérivant le ln).
Or la fonction u_n est de signe constant. Donc d'après le calcul ci dessus, le terme $\displaystyle\int_0^1 u_n(x)dx$ est le terme général d'une série convergente.

Ainsi d'après le théorème de sommation terme à terme on a :
$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} -\ln(x)x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 -\ln(x)x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Q15. On pose $g : (x,t) \mapsto \frac{Arctan(xt)}{1+t^2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, et la fonction Arctan est bornée. Donc f est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q16. Soit $a \in]0,1]$, on va appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour $x \in [a,1]$.
-La fonction $x \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,1]$.
-La fonction $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (continue sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente à $\frac{1}{x^2t^3}$ au voisinage de l'infini qui est intégrable).
-$|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)| \leq \frac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$ pour tout x. Or $t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,1]$. Cela pour tout $a \in]0,1]$.
Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ avec $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}dt$.

Q17. On a $\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} = \frac{t(1-x^2)}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$ que l'on note (*)

-Soit $a \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_0^a \frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2}dt = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+a^2}{1+x^2a^2})$.
Or $\lim_{a\to+\infty} \frac{1+a^2}{1+x^2a^2} = \frac{1}{x^2}$.
En intégrant de 0 à $+\infty$ (car chaque terme est intégrable sur $\mathbb{R}^+$) la relation (*) on a : $ln(\frac{1}{x}) = (1-x^2)f'(x)$. D'où $\forall x \in]0,1], f'(x) = \frac{ln(x)}{(x^2-1)}$.

Q18. On a $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{0}{1+t^2}dt = 0$.
De plus $f(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{Arctan(t)}{1+t^2}dt = [\frac{1}{2}Arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$.

En intégrant le résultat de la question 17 entre 0 et 1 on a (tous les termes sont intégrables d'après les question précédents et le théorèmes fondamentales de l'analyse) et d'après la question 14 :

$$\frac{\pi^2}{8} = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)dt = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2 - 1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Ainsi d'après le résultat montrer à la question 8 on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

FIN