CONCOURS COMMUN CINP 2024
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2 - FILIÉRE MP

m.laamoum2@gmail.com [1]

EXERCICE 1

Q1.

- Polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 2 \\ 6 & X-4 & 6 \\ 1 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \\
&\overset{C_1 \leftarrow C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 2 \\ X+2 & X-4 & 6 \\ 0 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \\
&\overset{L_2 \leftarrow L_2-L_1}{=} \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 2 \\ 0 & X-2 & 4 \\ 0 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \\
&= (X+2)\begin{vmatrix} X-2 & 4 \\ -1 & X+3 \end{vmatrix} \\
&= (X+2)(X^2+X-2)
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\chi_A(X) = (X+2)^2(X-1)}$ et $Sp(A)\,\{1,-2\}$.

- Sous espaces propres de A :
  - ▷ $E_{-2}(A)$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2}(A) &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x+2y-2z = -2x \\ -6x+4y-6z = -2y \\ -x+y-3z = -2z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y-2z = 0 \\ -6x+6y-6z = 0 \\ -x+y-z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x-y+z = 0
\end{aligned}$$

ainsi $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\boxed{E_{-2}(A) = \operatorname{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$.

  - ▷ $E_1(A)$

[1] `https://tinyurl.com/2qyzzrbd`

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+2y-2z=x \\ -6x+4y-6z=y \\ -x+y-3z=z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x+2y-2z=0 \\ -6x+3y-6z=0 \\ -x+y-4z=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y-4z \\ y=6z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2z \\ y=6z \end{cases}$$

donc $\boxed{E_1(A)=\text{vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$

- Diagonalisation de A :

A est diagonalisable car chaque sous espace propre est de dimension égale à la multiplicité de la valeur propre associée , donc $A=PDP^{-1}$avec

▷ $\boxed{D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

▷ Posons $v_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{cases} v_1=2e_1+6e_2+e_3 \\ v_2=e_1+e_2 \\ v_3=-e_1+e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_2=v_2-e_1 \\ e_3=v_3+e_1 \\ v_1=2e_1+6(v_2-e_1)+(v_3+e_1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_1=\frac{1}{3}(-v_1+6v_2+v_3) \\ e_2=\frac{1}{3}(v_1-3v_2-v_3) \\ e_3=\frac{1}{3}(-v_1+6v_2+4v_3) \end{cases}$$

donc $\boxed{P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}}$

Q2. Application:

▷ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $X_{n+1}=AX_n$, comme $Y_n=P^{-1}X_n$ alors $PY_{n+1}=APY_n$ et $Y_{n+1}=P^{-1}APY_n$ or $A=PDP^{-1}$ donc $Y_{n+1}=DY_n$ et

$$\begin{cases} \alpha_{n+1}=\alpha_n \\ \beta_{n+1}=-2\beta_n \\ \gamma_{n+1}=-2\gamma_n \end{cases}$$

ce qui donne $\begin{cases} \alpha_n=\alpha_0 \\ \beta_n=(-2)^n\beta_0 \\ \gamma_{n+1}=(-2)^n\gamma_0 \end{cases}$ et $\boxed{Y_n=\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ (-2)^n\beta_0 \\ (-2)^n\gamma_0 \end{pmatrix}}$

▷ Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge , l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui a une matrice M associée $P^{-1}M$ est linéaire en dimension finie donc elle est continue , ce qui assure la convergence de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (P^{-1}X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a clairement $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\beta_0 = \gamma_0 = 0$.

Si $\beta_0 = \gamma_0 = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = P\begin{pmatrix}\alpha_0\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha_0\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

Q3. En Python, cela se fait avec `s[1]`.

La transposition `(2 3)` est une permutation qui échange les éléments `2` et `3` et laisse `0` et `1` , donc la liste Python représentant la transposition `(2 3)` dans $\mathcal{S}_4$ serait `[0, 1, 3, 2]`.

Q4. Fonction `comp` pour la composition de permutations :

```python
def comp(s1, s2):
    n = len(s1)
    result = [0] * n
    for i in range(n):
        result[i] = s1[s2[i]]
    return result
```

Q5. Fonction `inv(s)` pour l'inverse d'une permutation :

```python
def inv(s):
    n = len(s)
    result = [0] * n
    for i in range(n):
        result[s[i]] = i
    return result
```

Q6. Pour vérifier si un sous-ensemble G de $\mathcal{S}_n$ est un sous-groupe, nous devons vérifier trois conditions : l'élément neutre (l'identité) est-il présent, est-il stable par la composition et l'inversion. Voici une fonction Python `groupe` pour cela :

```python
def groupe(G):
    n = len(G[0])
    # Verifier l'identite
    identity = list(range(n))
    if identity not in G:
        return False

    # Verifier la stabilite par composition
    for s1 in G:
        for s2 in G:
            if comp(s1, s2) not in G:
                return False

    # Verifier la stabilite par l'inversion
    for s in G:
        if inv(s) not in G:
            return False

    return True
```

Q7. Pour trouver le sous-groupe engendré par une permutation, nous devons composer successivement la permutation jusqu'à ce que nous revenions à la permutation initiale. Voici une fonction Python `eyelique` pour cela :

```
def eyelique(s):
    subgroup = [s]
    current = s
    while True:
        current = comp(s, current)
        if current == s:
            break
        subgroup.append(current)
    return subgroup
```

NB: les fonctions Python sont données seulement à titre indicatif .

PROBLÈME

Q9. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ on a

$$\begin{aligned} X^\top M X &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 + 2xy + y^2 \\ &= x^2 + (x+y)^2 \end{aligned}$$

donc $X^\top MX \geq 0$ et si $X^\top MX = 0$ alors $x = y = 0$ ce qui est absurde, donc $X^\top MX > 0$ et A est définie positive .

Caractérisation spectrale

Q9. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire usuel : $\langle X, Y\rangle = X^\top Y$ et de la norme euclidienne $\|X\| = \sqrt{X^\top X}$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, montrons que M est définie positive si et seulement si $Sp(M) \subset \mathbb{R}^{*+}$.
M est symétrique et réelle, d'après le théorème spectral elle est diagonalisable dans une base orthonormée . Posons $Sp(M) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ et $(V_1, \ldots, V_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M , avec $MV_i = \lambda_i V_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

- Si M est définie positive :

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a $V_i \neq 0$ donc $V_i^\top M V_i > 0$ de plus $V_i^\top M V_i = \lambda_i V_i^\top V_i = \lambda_i \|V_i\|^2$, donc $\lambda_i > 0$ ainsi $Sp(M) \subset \mathbb{R}^{*+}$.

- Si $Sp(M) \subset \mathbb{R}^{*+}$:

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$,il existe des réelles $x_1, ..., x_n$ non tous nuls tels que $X = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i$, on a donc

$$MX = \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j V_j$$

et

$$\begin{aligned} X^\top M X &= \left(\sum_{i=1}^n x_i V_i^\top\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j \lambda_j V_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \lambda_j V_i^\top V_j \end{aligned}$$

or $V_i^\top V_j = \langle V_i, V_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$ donc

$$X^\top M X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

ce qui donne $X^\top M X > 0$ et M est définie positive .

Q10. Application:

- $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$, , on a $P'(t) = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t-1)(t-3)$. On obtient le tableau des variations

t	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$P'(t)$			$+$		0	$-$	0	$+$	
$P(t)$	$-\infty$	↗	-3	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

le théorème des valeurs intermédiaires assure que P s'annule sur les intervalles $]-\infty, 1[$, $]1, 3[$,et $]3, +\infty[$. De plus $P(0) = -3$ donc P s'annule sur l'intervalle $]0, 1[$, ainsi P admet trois racines positives .
Les racines de P sont approximativement : $0.467\,91$ *;* $1.652\,7$ *et* $3.879\,4$.

- Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ c'est une matrice symétrique réelle , calculons son polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \chi_B(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & X-2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)(X^2 - 5X + 5) - X + 2 \\ &= X^3 - 6X^2 + 9X - 3 \end{aligned}$$

B est une matrice symétrique réelle et $Sp(B) \subset \mathbb{R}^{*+}$donc elle est définie positive .

Un critère en dimension 2

Q11. Si M de taille n est symétrique définie positive donc $Sp(M) \subset \mathbb{R}^{*+}$ et on a $\operatorname{Tr}(M) = \sum\limits_{\lambda \in Sp(M)} \lambda > 0$ et $\det(M) = \prod\limits_{\lambda \in Sp(M)} \lambda > 0$.

Q12. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$une matrice symétrique vérifiant $\mathrm{Tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$, on a $Sp(M) = \{\lambda\ ,\mu\} \subset \mathbb{R}$, donc $\lambda + \mu > 0$ et $\lambda\mu > 0$, par suite λ et μ sont non nulles et de même signe de plus λ , μ et $\lambda + \mu$ sont de même signe d'où $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, ce qui prouve que M est définie positive.

Q13. Soit $M = diag(3, 1, -1)$, $\det(M) = 3$ et $\mathrm{Tr}(M) = 3$ mais elle n'est pas définie positive.

Q14. Application:

Soit $f : \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$

Les points critiques de f sont solutions du système (S) suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

on a alors

$$\begin{aligned} (S) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2 y} = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{x\ y^2} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x = y = \frac{1}{xy} \\ &\Leftrightarrow \quad x = y \text{ et } x^3 = 1 \end{aligned}$$

f admet un seul point critiques dans $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ qui est $(1, 1)$.

La nature de ce point est déterminée par la matrice Hessienne de f en (1,1) .

On a $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) \end{pmatrix}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2}{x^3 y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{2}{y^3 x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{1}{y^2 x^2}$,

donc $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Comme $\det H_f(1,1) = 3 > 0$ et $\mathrm{Tr}\, H_f(1,1) = 4 > 0$ alors $H_f(1,1)$ est définie positive donc $(1,1)$ est un minimum local.

Le critère de Sylvester

Q15. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $k \in [\![1, n]\!]$ et $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

- Si $X_k \neq 0$, posons alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\}$ qu'on va noter par blocs $X = \left[\begin{array}{c} X_k \\ \hline 0_{n-k,1} \end{array}\right]$, et

posons $M = \left(\begin{array}{c|c} M_k & B \\ \hline C & A \end{array}\right)$ avec $A \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{R})$, on a alors

$$MX = \left(\begin{array}{c|c} M_k & B \\ \hline C & A \end{array}\right) \left[\begin{array}{c} X_k \\ \hline 0_{n-k,1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} M_k X_k \\ \hline C X_k \end{array}\right]$$

et

$$X^\top M X = \left[\begin{array}{c|c} X_k^\top & 0_{1,n-k} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} M_k X_k \\ \hline C X_k \end{array}\right] = X_k^\top M_k X_k$$

- Si $X_k = 0$, on prend $X = \left[\begin{array}{c} Y \\ \hline 0_{n-k,1} \end{array}\right]$ avec $Y \in \ker(M_k)\backslash\{0\}$.

Ce qui donne $X^\top MX = Y^\top M_k Y = X_k^\top M_k X_k = 0$.
Ainsi il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, tel que $X_k^\top M_k X_k = X^\top MX$

Q16. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive et $k \in [\![1, n]\!]$.
On a $M_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle , soit $X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$. D'après la question **Q15.** il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, tel que $X_k^\top M_k X_k = X^\top MX$ or M est définie positive donc $X^\top MX > 0$ d'où $X_k^\top M_k X_k > 0$ et M_k symétrique réelle définie positive, ainsi M vérifie le critère de Sylvester.

Q17. Soit $n \geq 2$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $\det(M) > 0$. On pose

$$M = \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & U \\ \hline U^\top & \alpha \end{array}\right) \text{avec } M_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}$$

avec M_{n-1} définie positive.

- On a $\det(M_{n-1}) > 0$ donc M_{n-1} elle est inversible, soit $V = -(M_{n-1})^{-1} U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, il vérifie alors $M_{n-1}V + U = 0_{n-1,1}$.
- Soit $Q = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & V \\ \hline 0_{1,n-1} & 1 \end{array}\right)$, on a

$$\begin{aligned} MQ &= \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & U \\ \hline U^\top & \alpha \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & V \\ \hline 0_{1,n-1} & 1 \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & M_{n-1}V + U \\ \hline U^\top & U^\top V + \alpha \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline U^\top & U^\top V + \alpha \end{array}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Q^\top MQ &= \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline V^\top & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline U^\top & U^\top V + \alpha \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline V^\top M_{n-1} + U^\top & U^\top V + \alpha \end{array}\right) \end{aligned}$$

remarquons que $V^\top M_{n-1} + U^\top = (M_{n-1}V + U)^\top = 0$ et $U^\top V + \alpha \in \mathbb{R}$ qu'on note β , ce qui donne $Q^\top MQ = \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline 0_{1,n-1} & \beta \end{array}\right)$.
On sait que $\det M > 0$ et $\det M_{n-1} > 0$, du fait que $\det Q = 1$ on a $\det Q^\top MQ = \det M = \beta \det M_{n-1}$ d'où $\beta > 0$.
Ce qui montre que $Q^\top MQ$ s'écrit par blocs $\left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline 0_{1,n-1} & \beta \end{array}\right)$ avec $\beta > 0$.

Q18. Posons $\mathcal{P}_n$: "Toute matrice symétrique réelle d'ordre n vérifiant le critère de Sylvester est définie positive".
$\mathcal{P}_1$est évident , soit $n \geq 2$ supposons $\mathcal{P}_n$ vrai , soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique vérifiant le critère de Sylvester , donc pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ on a $\det M_k > 0$, en particulier pour $k \in [\![1, n]\!]$ donc M_n qui est symétrique réelle d'ordre n vérifie le critère de Sylvester , par hypothèse de récurrence elle est définie positive.

D'après la question **Q17.** il existe une matrice Q et un réel $\beta > 0$ tels que $Q^\top MQ = \left(\begin{array}{c|c} M_n & 0_{n,1} \\ \hline 0_{1,n} & \beta \end{array}\right)$ avec $Q = \left(\begin{array}{c|c} I_n & V \\ \hline 0_{1,n} & 1 \end{array}\right)$, Q est donc inversible .

Soit $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ posons $Y = Q^{-1}X$ alors $Y \neq 0$ et

$$X^\top M X = (QY)^\top M \ (QY) = Y^\top \left(Q^\top M\, Q\right) Y$$

posons $Y = \left[\begin{array}{c} Z \\ \hline y \end{array}\right]$ avec $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}$, donc

$$\begin{aligned} X^\top M X &= \left[\begin{array}{c|c} Z^\top & y \end{array}\right] \left(\begin{array}{c|c} M_n & 0_{n,1} \\ \hline 0_{1,n} & \beta \end{array}\right) \left[\begin{array}{c} Z \\ \hline y \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} Z^\top & y \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} M_n Z \\ \hline \beta y \end{array}\right] \\ &= Z^\top M_n Z + \beta y^2 \end{aligned}$$

comme $(Z, y) \neq (0_{n,1}, 0)$ $\beta > 0$ et M_n est symétrique définie positive alors $X^\top M X > 0$, d'où M définie positive ce qui montre $\mathcal{P}_{n+1}$, d'où le résultat pour tout $n \geq 1$.

Q19. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$,

$C(x)$ est symétrique , elle est définie positive si elle vérifie le critère de Sylvester. Les mineurs principaux de $C(x)$ sont :

$$2\ , \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

et

$$\det C(x) = 2 \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2x^2$$

On a $\det C(x) > 0$ si et seulement si $x \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

Ainsi $C(x)$ est symétrique , elle est définie positive si et seulement si $x \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

Q20 On remarque que le mineur principal d'ordre 3 , $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7$, donc la matrice n'est pas définie positive.

Q21. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, posons $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz$ on a

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x(4x + 2y - 3z) + y^2 + z^2 \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= (x, y, z)\ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mais la matrice A n'est pas symétrique ! , la relation reste valable si on passe au transposée, donc $f(x, y, z) = (x, y, z)\ A^\top \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par suite

$f(x,y,z)=(x,y,z)\ \left(\frac{1}{2}(A+A^\top)\right)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ avec $\frac{1}{2}(A+A^\top)=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 1 & 1 & 0\\ -\frac{3}{2} & 0 & 1\end{pmatrix}$, qui est symétrique.

Les mineurs principaux de cette matrice symétrique sont : 4 , $\begin{vmatrix} 4 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3$ et $\det(\frac{1}{2}(A+A^\top))=\frac{3}{4}$, donc elle est définie positive , ainsi $f(x,y,z)>0$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$.

Q22. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\Delta_n=\det(S_n)$, le développement suivant la première ligne donne :

$$\Delta_n=\sqrt{3}\Delta_{n-1}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \sqrt{3}\end{vmatrix}=\sqrt{3}\Delta_{n-1}-\Delta_{n-1}$$

L'équation caractéristique est $X^2-\sqrt{3}X+1=0$, dont les solutions sont $r=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=e^{\frac{i\pi}{6}}$ et $\overline{r}=\frac{\sqrt{3}-i}{2}==e^{\frac{-i\pi}{6}}$.

Par suite $\Delta_n=\alpha e^{\frac{in\pi}{6}}+\beta e^{\frac{-in\pi}{6}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. On a $\Delta_1=\sqrt{3}$ et $\Delta_2=2$ donc

$$\begin{cases} \alpha e^{\frac{i\pi}{6}}+\beta e^{\frac{-i\pi}{6}}=\sqrt{3}\\ \alpha e^{\frac{i\pi}{3}}+\beta e^{\frac{-i\pi}{3}}=2\end{cases}$$

par suite $\alpha=\dfrac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & e^{\frac{-i\pi}{6}}\\ 2 & e^{\frac{-i\pi}{3}}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\frac{i\pi}{6}} & e^{\frac{-i\pi}{6}}\\ e^{\frac{i\pi}{3}} & e^{\frac{-i\pi}{3}}\end{vmatrix}}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\beta=\dfrac{\begin{vmatrix} e^{\frac{i\pi}{6}} & \sqrt{3}\\ e^{\frac{i\pi}{3}} & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\frac{i\pi}{6}} & e^{\frac{-i\pi}{6}}\\ e^{\frac{i\pi}{3}} & e^{\frac{-i\pi}{3}}\end{vmatrix}}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, donc $\alpha=-ie^{\frac{i\pi}{6}}$ et $\beta=ie^{\frac{-i\pi}{6}}$ ainsi on a

$$\Delta_n=i(-e^{\frac{i(n+1)\pi}{6}}+e^{\frac{-i(n+1)\pi}{6}})=2\sin\left(\frac{n+1}{6}\pi\right)$$

par suite $\Delta_1=\sqrt{3}$, $\Delta_2=2$, $\Delta_3=\sqrt{3}$, $\Delta_4=1$ et $\Delta_5=0$

Ainsi S_n est symétrique définie positive si et seulement si $n\in\{1,2,3,4\}$.